Logică și structuri discrete

Arbori

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

13 decembrie 2016

Arbori

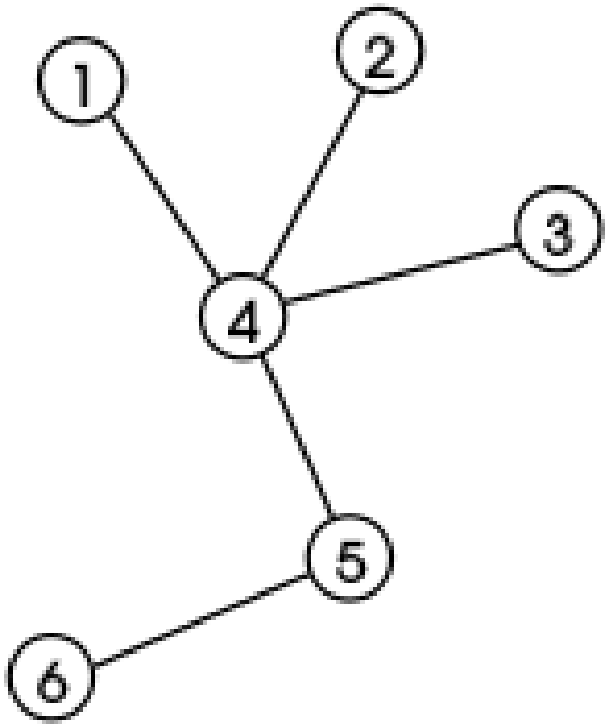
Un arbore e un *graf conex fără cicluri*.

conex = drum între orice 2 noduri (din 1 sau mai mulți pași)

E compus din *noduri* și *ramuri* (muchii).

$\Rightarrow$ un arbore cu n noduri are $n - 1$ ramuri

(demonstrăm prin *inducție*)



Imagine: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tree_graph.svg

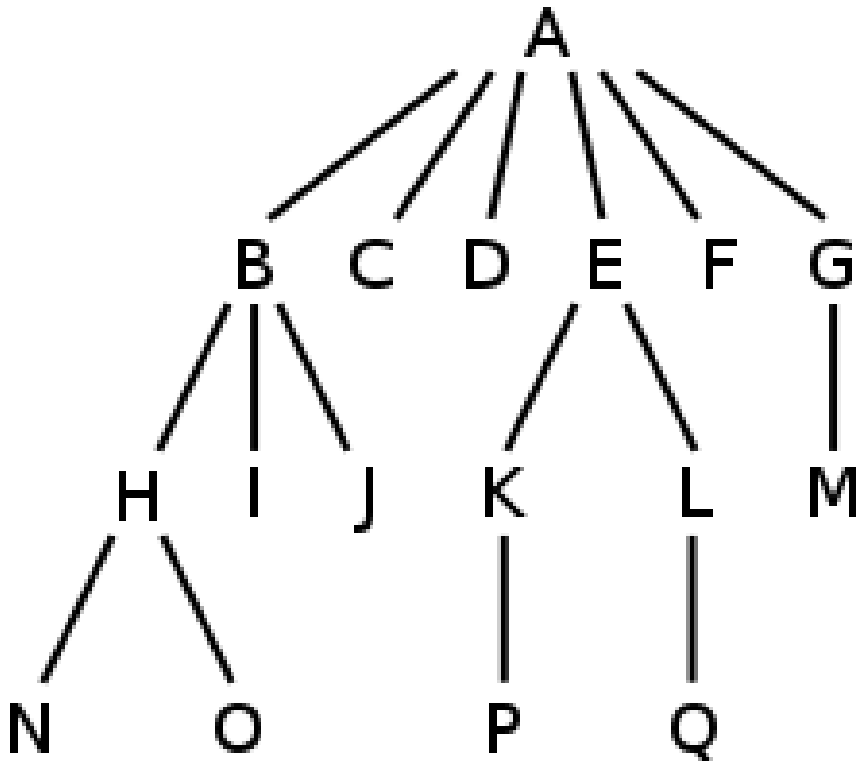
Arbore cu rădăcină

Deobicei identificăm un nod anume numit *rădăcina*, și *orientăm* muchiile în același sens față de rădăcină

Orice nod în afară de rădăcină are un unic *părinte*

Un nod poate avea mai mulți *copii* (*fii*)

Nodurile fără copii se numesc noduri *frunză*

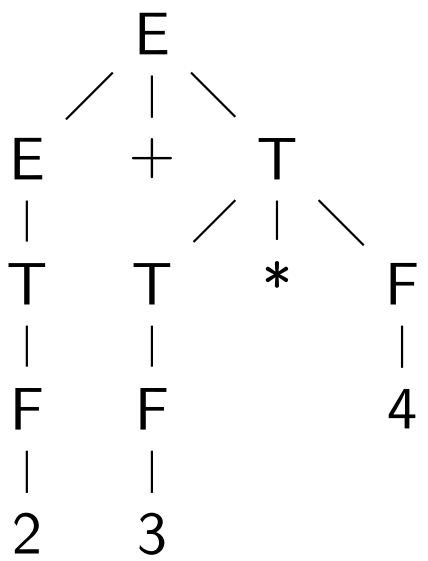


Imagine: http://en.wikipedia.org/wiki/File:N-ary_to_binary.svg

Arbori în informatică

Arborii sunt un mod natural de a reprezenta structuri *ierarhice*

- organigrama într-o instituție
- arborele sintactic într-o gramatică (ex. expresie)
- sistemul de fișiere (subarborii sunt cataloagele)
- fișierele XML (elementele conțin alte elemente)




```
<order>
  <item>
    <title="Data Structures"/>
    <price="24.99"/>
  </item>
  <item>
    <title="Mathematical Logic"/>
    <price="39.99"/>
  </item>
<order>
```

Arborele definit recursiv

Un arbore e un *nod* cu 0 sau mai mulți *subarbori*

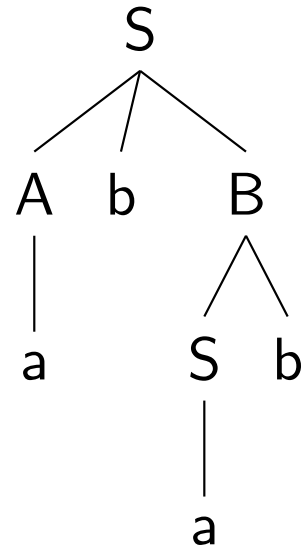
$\Rightarrow$ o *listă* de subarbori (frunzele au lista vidă)

În funcție de problemă, nodurile conțin *informație*

În exemplu: toate nodurile au informație de același *tip*

```
type 'a tree = T of 'a * 'a tree list

let t = T('S',[T('A',[T('a',[])]); T('b',[]);
  T('B',[T('S', [T('a',[])]);T('b',[])])])
```



Definiție recursivă: cu arbore vid

Definiția dată: bună când arborele totdeauna există (ex.: expresie)

Uneori, arborele poate fi vid (ex.: pentru reprezentarea de mulțimi).
Putem defini atunci:

Un arbore e fie arborele *vid* sau un *nod* cu mai mulți *subarbori*

$\Rightarrow$ extindem tipul anterior cu o valoare pentru arborele vid

$$tip\_nou = tip\_vechi \cup \{valoare\text{-}specială\}$$

```
type 'a option = None | Some of 'a
```

indică în ML o valoare de tipul `'a` care poate eventual lipsi

$\Rightarrow$ lucrăm cu valori de tipul `'a tree option`

`None` sau `Some t`, cu `t` de tip `'a tree` definit anterior:

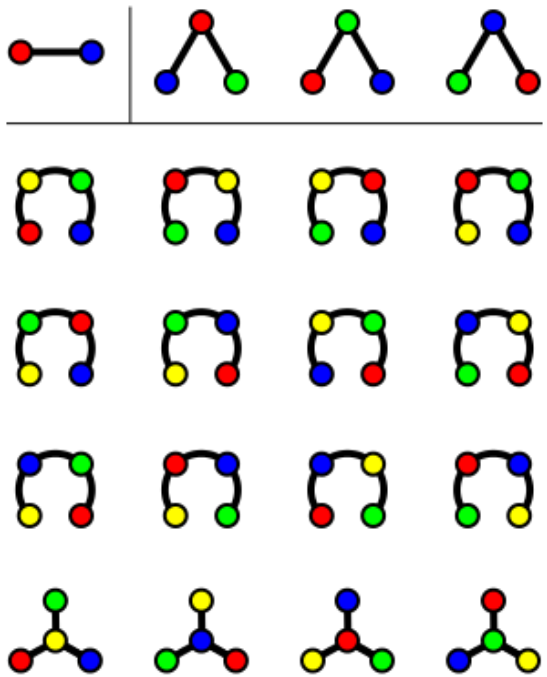
```
type 'a tree = T of 'a * 'a tree list
```

```
let f = function (* parametru arbore, vid sau nu *)
  | None -> (* cazul de prelucrare pentru arborele vid *)
  | Some T(r, tl) -> (* radacina r, lista de copii tl *)
```

Arbori ordonați și neordonați

Ordinea dintre copii poate conta (ex. arbore sintactic) sau nu

Arborii neordonați
cu 2 – 4 noduri:



(argumentați: de ce sunt 12 variante liniare cu 4 noduri?)

Există n^{n-2} arbori neordonați cu n noduri (*formula lui Cayley*)
Demonstrație frumoasă: reprezentând un arbore ca șir de $n-2$ numere de la 1 la n (citiți opțional despre *codul Prüfer*):
șterge numărul minim, scrie nr. la care era legat, până rămân 2 noduri

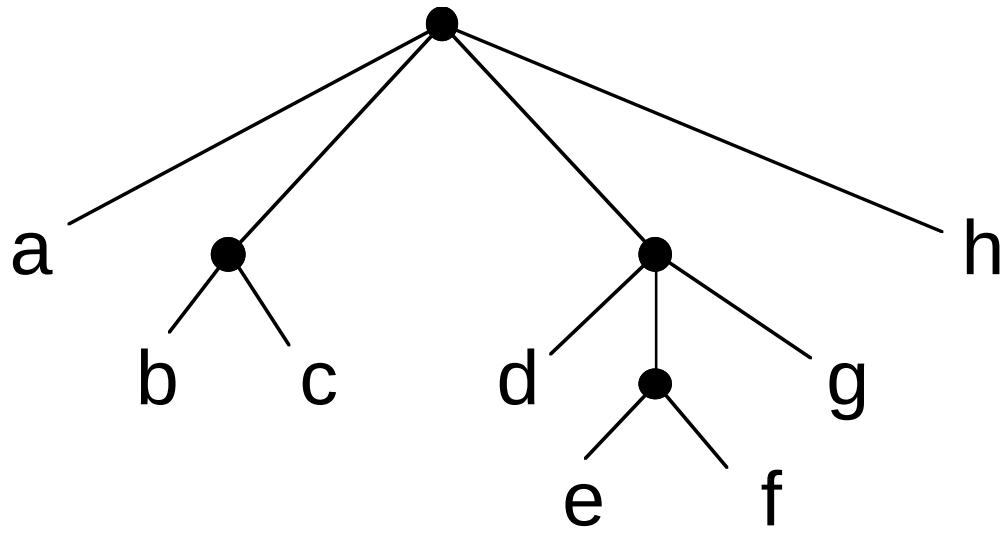
Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Cayley's_formula_2-4.svg`

Arbori neetichetați

Uneori, nu avem informație utilă decât în nodurile frunză:

$\Rightarrow$ reprezentăm explicit varianta de nod frunză

```
type 'a tree = L of 'a | T of 'a tree list
```



$\Rightarrow$ arborele e echivalent cu o *listă ierarhică* (listă de liste)

[a, [b, c], [d, [e, f], g], h]

dar o listă de liste trebuie să fie uniformă pe nivele (același tip)

```
T [L 'a'; T [L 'b'; L 'c'];
   T [L 'd'; T [L 'e'; L 'f']; L 'g']; L 'h']
```

Imagine: R. M. Keller: Computer Science: Abstraction to Implementation

Arbori binari

Într-un arbore binar, fiecare nod are cel mult doi copii, identificați ca fiul stâng și fiul drept (oricare/ambii pot lipsi)

$\Rightarrow$ un arbore binar e fie: arborele vid

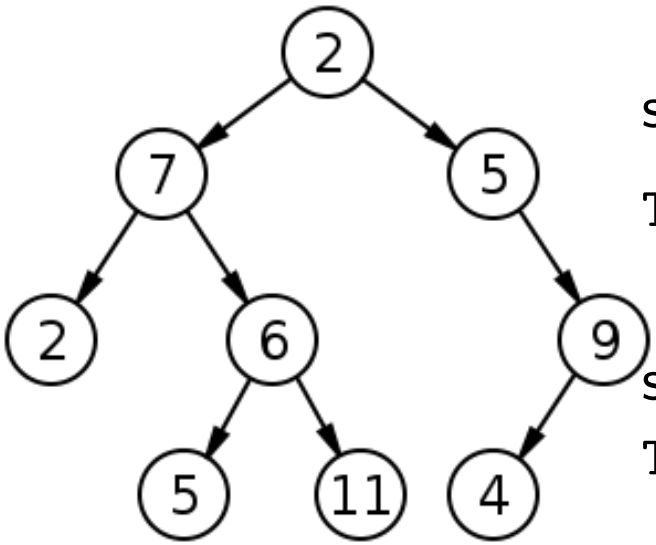
un nod cu cel mult doi subarbori

```
type 'a bintree = Nil | T of 'a bintree * 'a * 'a bintree
```

Instanțiind pentru noduri întregi:

```
type inttree = Nil | T of inttree * int * inttree
```

Un arbore binar de înălțime n are cel mult $2^{n+1} - 1$ noduri



subarborele stâng:

```
T (T(Nil, 2, Nil), 7,
   T(T(Nil, 5, Nil), 6, T(Nil, 11, Nil)))
```

subarborele drept:

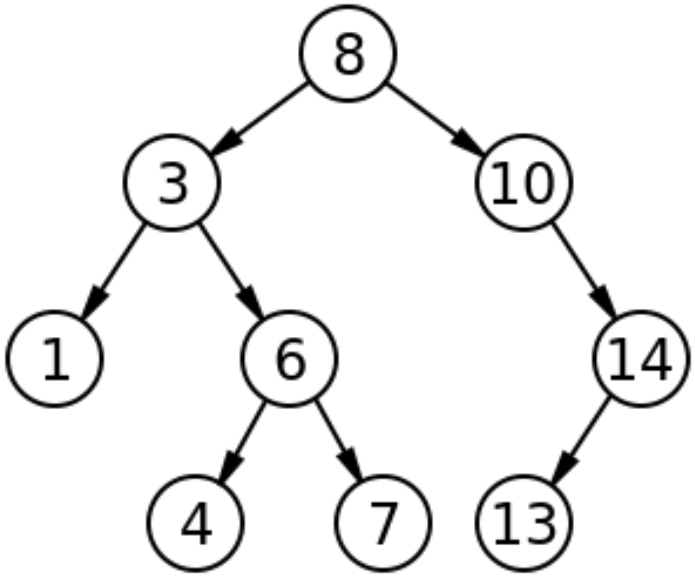
```
T (Nil, 5, T(T(Nil, 4, Nil), 9, Nil))
```

Imagine: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Binary_tree.svg

Arbori binari de căutare

Memorează valori sortate în ordine:
pentru fiecare nod,
subarborele stâng are valori mai mici,
subarborele drept are valori mai mari

Pot fi folosiți pentru a reprezenta *mulțimi*



Căutarea: recursiv în subarborele potrivit

```
let bsearch x = (* cauta x in arbore *)
  let rec srchx = function (* x fixat mai sus *)
    | Nil -> false
    | T (left, v, right) ->
       v = x || srchx (if x < v then left else right)
  in srchx
```

https://en.wikipedia.org/wiki/Binary_search_tree

Arbori strict binari

engl. strictly binary tree, proper binary tree (binar propriu-zis)

Fiecare nod care nu e frunză are *exact* doi copii

de exemplu, un arbore pentru expresii cu operanzi binari

```
type 'a bintree = L of 'a | T of 'a bintree * 'a * 'a bintree
```

dacă avem același tip în frunze și celelalte noduri

Arbore strict binar cu n frunze $\Rightarrow n-1$ noduri ce nu sunt frunze

Un arbore strict binar de înălțime n are cel mult 2^n frunze

Parcurgerea arborilor

în *preordine*: întâi rădăcina, apoi subarborii

în *inordine*: arborele stâng, apoi rădăcina, apoi arborele drept

în *postordine*: întâi subarborii, apoi rădăcina

Pentru expresii, obținem astfel formele prefix, infix și postfix

Parcurgerea în pre- și post-ordine se definește la fel pentru orice arbori (nu doar binari)