Logică și structuri discrete

Grafuri

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

19 decembrie 2016

Teoria grafurilor și știința rețelelor

Teoria grafurilor:
studiul matematic al grafurilor (reprezentând relații între obiecte)

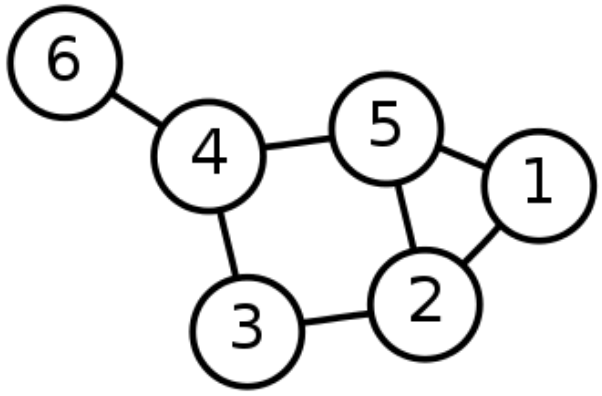
De aici a evoluat
știința rețelelor (network science): studiul rețelelor complexe:
de calculatoare, telecomunicații, energie, biologice, sociale...

"studiul reprezentărilor ca rețele a fenomenelor fizice, biologice și sociale, ducând la *modele predictive* ale acestor fenomene".

[US National Research Council]

Definiția grafurilor

Informal, un graf reprezintă o mulțime de *obiecte* (*noduri*) între care există anumite *legături* (*muchii* sau *arce*).



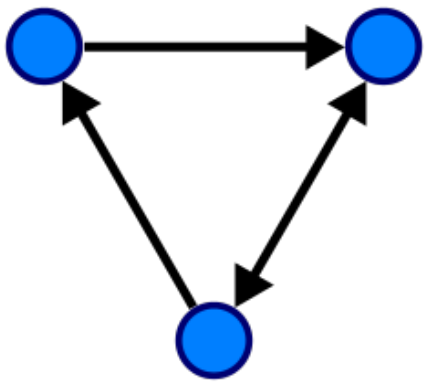
Formal, un graf e o pereche ordonată $G = (V, E)$, unde
V e mulțimea nodurilor și
E (mulțimea muchiilor) e o mulțime de perechi $(u, v) \in V \times V$

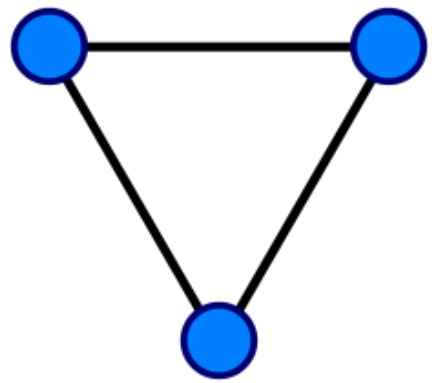
Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:6n_graf.svg`

Grafuri orientate și neorientate

Un graf e *orientat* dacă muchiile sale sunt perechi *ordonate*

Un graf e *neorientat* dacă muchiile sale sunt perechi *neordonate* (nu contează sensul parcurgerii)





Imagini: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Directed.svg`
`http://en.wikipedia.org/wiki/File:Undirected.svg`

Grafuri și relații

Muchiile unui graf formează o *relație* $E \subseteq V \times V$ pe mulțimea nodurilor.

Un graf *neorientat* poate fi reprezentat printr-o relație *simetrică*

$$\forall u, v \in V \,.\, (u, v) \in E \rightarrow (v, u) \in E$$

Într-un graf *orientat*, E e o relație oarecare
(nu trebuie să fie simetrică, dar poate fi)

Reciproc, *orice relație binară* poate fi văzută ca un *graf orientat*
pentru $(u, v) \in E$ introducem o muchie $u \longrightarrow v$

Drumuri în graf

Un *drum* (o cale) într-un graf e o secvență de muchii
care leagă o secvență de noduri $x_0, \ldots x_n$ cu $n \geq 0$
astfel ca $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pentru orice $i < n$.

$$x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_{n-1} \longrightarrow x_n$$

Putem defini un drum atât în grafuri orientate cât și neorientate

Un drum are un *nod inițial* x_0 și un *nod final* x_n.

Lungimea unui drum e numărul de muchii.
în particular, poate fi zero (un nod x_0, fără niciun fel de muchii)

Drumuri și închiderea tranzitivă

Drumurile de lungime nenulă sunt date de *închiderea tranzitivă* a relației E:

$$E^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E \cup E^2 \cup \dots$$

relația E^k $(k \geq 1)$ corespunde drumurilor de lungime k

$E^2 = E \circ E = \{(u, v) \mid \exists w.(u, w) \in E \wedge (w, v) \in E\}$

$u \to w \to v$

$E^3 = E^2 \circ E = \{(u, v) \mid \exists w.(u, w) \in E \wedge (w, v) \in E^2\}$ etc.

$u \to w \overset{2pasi}{\to} v$ adică $u \to w \to w' \to v$

Putem deasemenea defini un predicat *drum* cu proprietățile

$\forall u, v \in V \,.\, (u, v) \in E \to drum(u, v)$

$\forall u, v \in V \,.\, (\exists w \in V \,.\, (u, w) \in E \wedge drum(w, v)) \to drum(u, v)$

Cicluri în graf

Un *ciclu* e un drum de lungime nenulă în care nodurile de început și sfârșit sunt aceleași

Adeseori, lucrăm cu *cicluri simple*:
cicluri în care muchiile și nodurile nu apar de mai multe ori
(cu excepția nodului inițial care e și cel final).

Grafuri și componente conexe

Un graf e *conex* dacă are un drum de la orice nod la orice nod.
(definiție generală, depinde de *drum* (în graf orientat sau neorientat)

Pentru grafuri *neorientate*:

O *componentă conexă* e un subgraf conex maximal.
deci are un drum între oricare două noduri
nu s-ar mai putea adăuga alte noduri păstrând-o conexă

Un graf cu n noduri și e muchii are $\geq n - e$ componente conexe.
Demonstrăm prin inducție după e.
$e = 0 \Rightarrow$ fiecare nod e o componentă conexă.
$e > 1$: ștergem o muchie $\Rightarrow$ obținem cel mult o componentă în plus

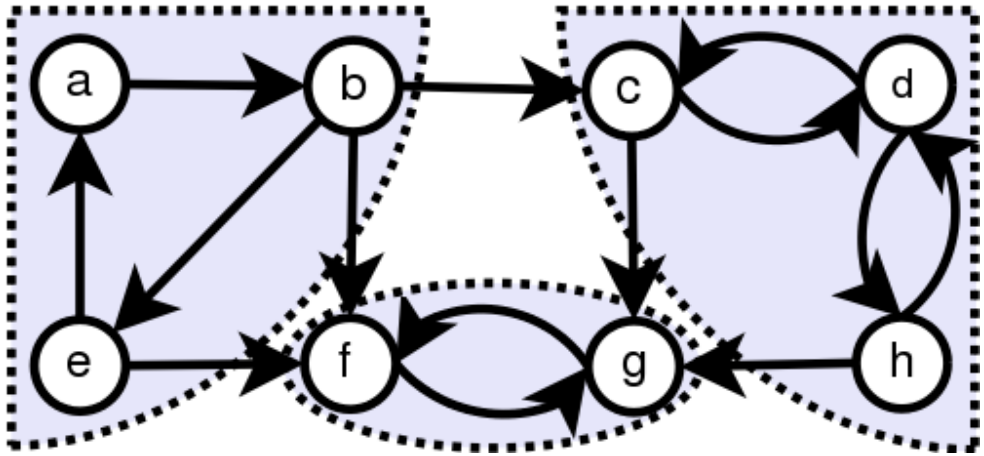
Folosiți ca să demonstrați: un arbore cu n noduri are $n - 1$ muchii.

Grafuri orientate: slab conexe și tare conexe

Un graf *orientat* e *slab conex* dacă are un drum *neorientat* de la orice nod la orice nod, și *tare conex* dacă are un drum *orientat* de la orice nod la orice nod.

O *componentă tare conexă* e un *subgraf* tare conex maximal.
Componentele tare conexe sunt *disjuncte*:
relația $R(u, v) : drum(u, v) \wedge drum(v, u)$ e o *relație de echivalență*,
și componentele tare conexe sunt *clase de echivalență*.

Graful orientat din figură e slab conex. Are trei componente tare conexe.



Imagine: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Scc.png`

Determinarea componentelor conexe (graf neorientat)

Componentele conexe sunt *clase de echivalență*

- orice nod e în componenta proprie — *reflexivitate*
- un drum de la u la v e și drum de la v la u — *simetrie*
- $drum(u, v) \wedge drum(v, w) \rightarrow drum(u, w)$ — *tranzitivitate*

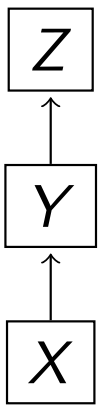
Determinăm componentele conexe parcurgând muchiile grafului:

- inițial, fiecare nod e în propria componentă
- pentru o muchie (u, v) *unim* componentele lui u și v

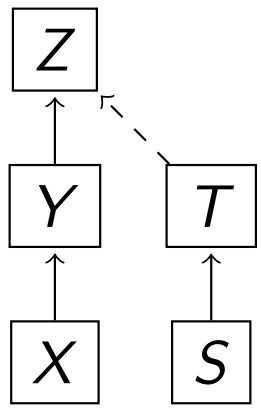
Putem face asta printr-un algoritm/structură *Union-Find*

Union-Find cu dicționare

Fiecare nod e singur sau legat la un nod cu care e echivalent
o pădure de arbori cu legături de la fiu la părinte
find(element): dă reprezentantul clasei de echivalență (rădăcina)
union(elem1, elem2): face elementele echivalente (leagă rădăcinile)



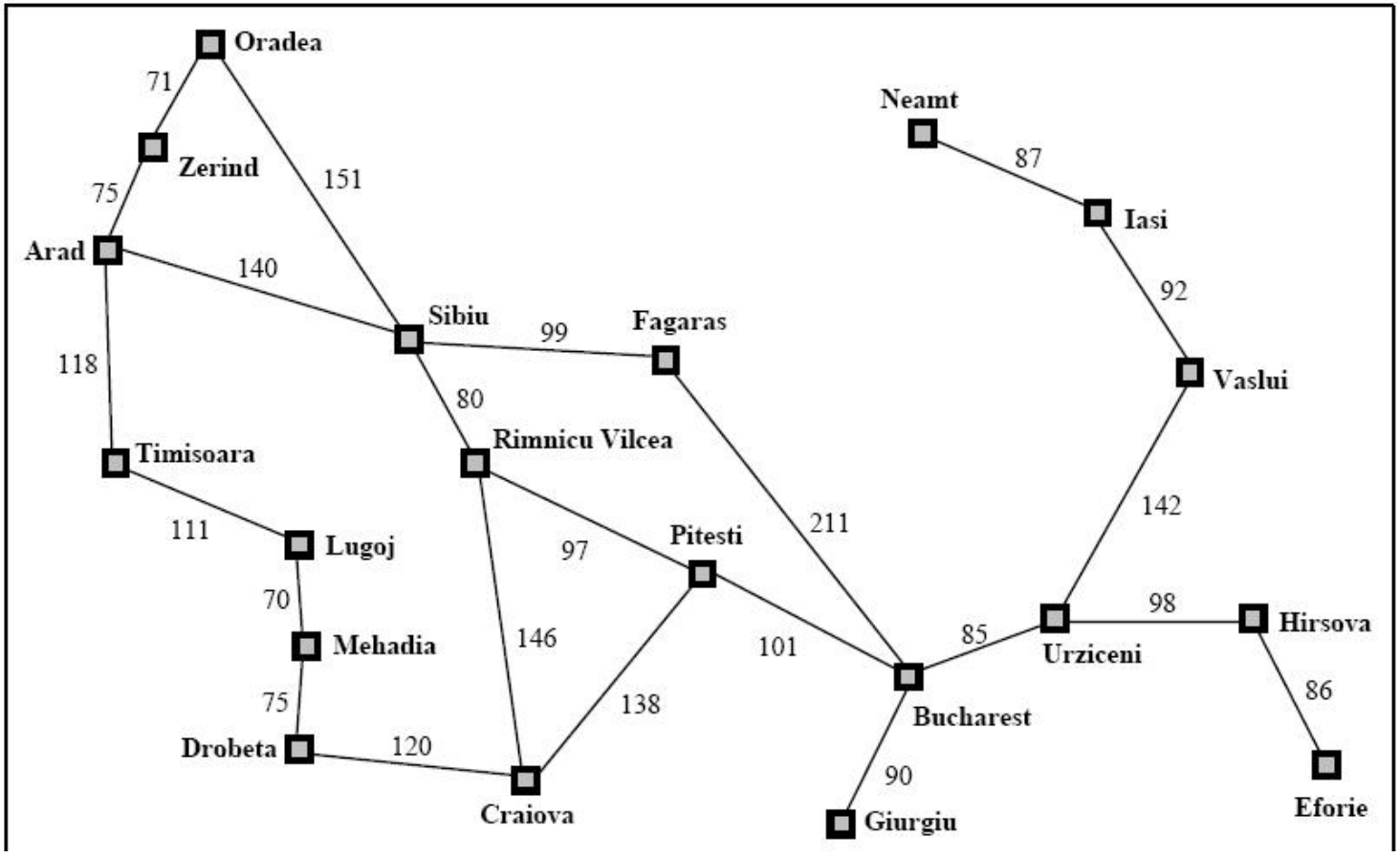
$find(X) = find(Y)$
$= find(Z) = Z$



$union(Y, S)$
leagă $find(Y)$ și $find(S)$

Exemple: hărțile ca și grafuri ponderate

Graf ponderat: fiecare muchie are asociată o valoare numerică numită *cost* (poate reprezenta lungime, capacitate, etc.)



Hartă (inexactă) din Russell & Norvig, Introduction to AI

Drumuri Euleriene (în grafuri neorientate)

Def: *Gradul* unui nod (într-un graf neorientat) e numărul de muchii care ating nodul

Un *drum eulerian* e un *drum* care conține toate muchiile unui graf exact o dată

Un *ciclu eulerian* e un *ciclu* care conține toate muchiile unui graf exact o dată

Un graf conex neorientat are un ciclu eulerian dacă și numai dacă toate nodurile au grad par.

Un graf conex neorientat are un drum (dar nu și un ciclu) eulerian dacă și numai dacă exact două noduri au grad impar.
(primul și ultimul nod din drum)

Exemple: Graful fluxului de control (control flow graph)

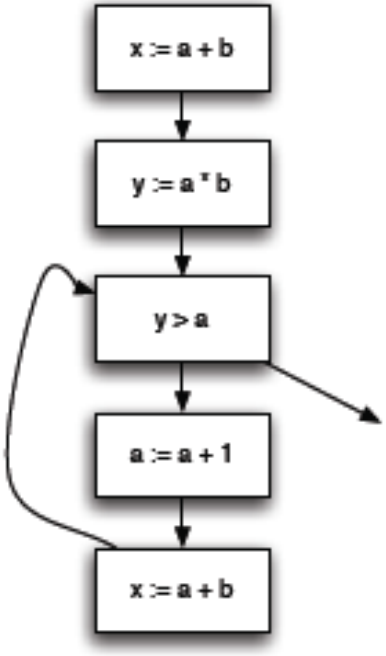
reprezentarea programelor în compilatoare, analizoare de cod, etc.

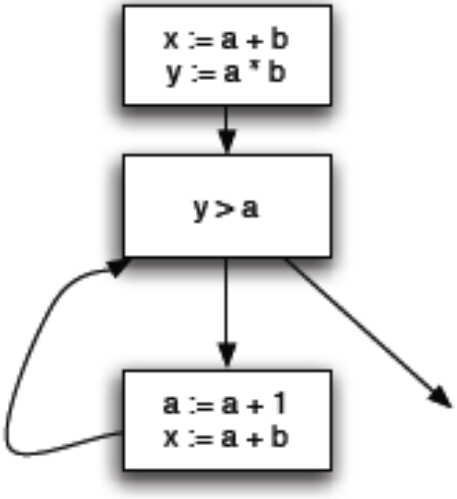
nodurile: *instrucțiuni*

sau *secvențe liniare* de instrucțiuni (*basic blocks*)

muchiile: descriu secvențierea instrucțiunilor (*fluxul de control*)

```
x := a + b;
y := a * b;
while (y > a) {
   a := a + 1;
   x := a + b
}
```





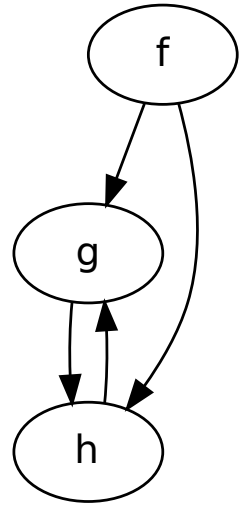
http://vinaytech.wordpress.com/2008/10/04/abstract-syntax-tree/

Exemple: Graful de apel al funcțiilor (call graph)

Introducem o muchie $f \longrightarrow g$ dacă funcția f apelează pe g

$\Rightarrow$ graful de apel e ciclic dacă există funcții (mutual) recursive

```
let rec g n =
  if n = 0 then 0 else 1 + h (n-1)
and h n =
  if n = 0 then 1 else 2 * g (n-1)
let f n = g n + h n
```



Reprezentarea grafurilor

Dacă identificăm nodurile prin numere (consecutive), putem reprezenta graful ca *matrice* pătratată

- M[i,j] = 1 dacă exista muchie de la i la j, altfel 0
- sau M[i,j] poate conține lungimea/costul muchiei

Reprezentarea prin *liste de adiacență*

- pentru fiecare nod u, lista/mulțimea nodurilor v cu muchii (u, v)
- putem păstra lista într-un *dicționar* (nod = cheie)

Parcurgerea grafurilor

Parcurgerea în adâncime (depth-first)

e o traversare în *preordine*

după vizitarea nodului se parcurg (recursiv) toți vecinii (dacă nu au fost vizitați încă)

ca și cum vecinii ar fi introduși într-o *stivă*

Parcurgerea prin cuprindere (breadth-first)

vizitează nodurile în ordinea distanței minime de nodul de plecare (în "valuri" care se depărtează de la nodul de pornire)

nodurile încă nevizitate se pun într-o *coadă*