

Logică și structuri discrete  
Relații. Funcții parțiale

Marius Minea  
marius@cs.upt.ro

<http://cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/>

23 octombrie 2017

# Relații în lumea reală și informatică

O relație (matematică) modelează *legătura* dintre două entități (posibil de *tip* diferit)

relații subiect-obiect:  $\overset{\text{cine?}}{\text{un om}} \xleftarrow{\text{relația}} \text{a citit} \xrightarrow{\text{ce?}} \text{o carte}$

relații umane: copil , părinte , prieten

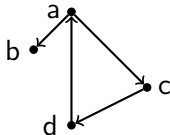
relații cantitative : egal, mai mic

Transpuse în informatică:

rețele sociale : “prieten”, “follow”, “în cercuri”, etc.

O relație între elementele *aceleiași* mulțimi definește un *graf* (elementele sunt noduri, relația e reprezentată prin muchii)

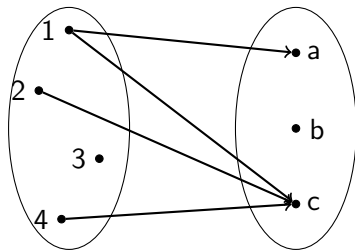
⇒ relațiile sunt o noțiune cheie în teoria grafurilor



## O relație e o mulțime de perechi

O *relație binară*  $R$  între două mulțimi  $A$  și  $B$  e o *mulțime de perechi*: o *submulțime a produsului cartezian*  $A \times B$ :  $R \subseteq A \times B$

Notăm  $(x, y) \in R$  sau  $x R y$  sau  $R(x, y)$   $x$  e *în relație* cu  $y$



$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(1, a), (1, c), (2, c), (4, c)\}$$

O relație e o noțiune *mai generală* decât o funcție: o funcție asociază *fiecărui*  $x \in A$  *un singur*  $y \in B$

Într-o relație putem avea (vezi figura):

- 1: are asociate *mai multe* elemente: a, c
- 2: are asociat *un singur* element: c
- 3: nu are asociat *niciun* element din  $B$

## Relații: generalități

În general, o relație nu e o noțiune simetrică:  
produsul cartezian/perechea sunt noțiuni ordonate,  $(x, y) \neq (y, x)$   
Există, desigur, relații simetrice (în lumea reală și în matematică)

Generalizat, putem avea o *relație n-ară* care e o mulțime de  $n$ -tupluri (din produsul cartezian a  $n$  mulțimi).

Exemplu:  $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$R(x, y, m)$  dacă  $m$  e un multiplu comun pentru  $a$  și  $b$ :

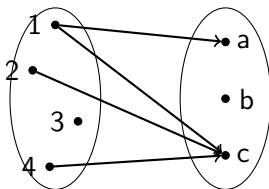
$R(2, 9, 18)$ ,  $R(6, 9, 18)$ ,  $R(2, 9, 36)$ , etc.

## Reprezentarea unei relații

Explicit, prin *mulțimea perechilor*  
(dacă e finită)

$$R \subseteq \{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b, c\}$$

$$R = \{(1, a), (1, c), (2, c), (4, c)\}$$



Printr-o *regulă* care leagă elementele:

$$R = \{(x, x^2 + 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

Ca *matrice* booleană/binară, dacă  $A, B$  finite,  
linii indexate după  $A$ , și coloanele după  $B$

$m_{xy} = 1$  dacă  $(x, y) \in R$ ,  $m_{xy} = 0$  dacă  $(x, y) \notin R$

în practică: dacă  $A$  și  $B$  nu sunt foarte mari

	a	b	c
1	1	0	1
2	0	0	1
3	0	0	0
4	0	0	1

## Relația văzută ca funcție

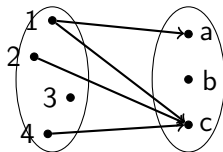
O *relație*  $R \subseteq A \times B$  poate fi văzută ca o *funcție*  $f_R : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  de la  $A$  la *mulțimea părților* lui  $B$ :

$$f_R(x) = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$$

Asociază fiecărui  $x$  mulțimea elementelor lui  $B$

cu care  $x$  e în relație (posibil vidă):

$$f_R(1) = \{a, c\}, f_R(3) = \emptyset$$



Un vector de biți/booleani poate reprezenta o mulțime:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{reprezintă } \{a, c\} \quad (\text{prin funcția caracteristică})$$

## Numărul de relații între două mulțimi

Între  $A$  și  $B$  (finite) există  $2^{|A| \cdot |B|}$  relații  $R \subseteq A \times B$

Rezultă direct din definiție: o relație e o submulțime  $R \subseteq A \times B$ .  
Deci,  $R \in \mathcal{P}(A \times B)$ . Dar  $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|}$ .

Sau, folosind reprezentarea ca matrice, care are  $|A| \cdot |B|$  elemente.  
fiecare: ales independent în 2 feluri: 0 sau 1, deci  $2^{|A| \cdot |B|}$  variante.

Sau, considerând funcția corespunzătoare,  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$ .  
Numărul de funcții e  $|\mathcal{P}(B)|^{|A|} = (2^{|B|})^{|A|} = 2^{|B| \cdot |A|}$

# Funcții parțiale

O funcție parțială  $f : A \rightarrow B$  e un *caz particular de relație*:  
asociază câte *un singur* element din  $B$  (ca funcția)  
dar *nu neapărat fiecărui* element din  $A$  (cum e obligată funcția)

Funcții parțiale sunt utile

– când domeniul exact al funcției nu e cunoscut

(funcții care nu sunt neapărat calculabile în orice punct).

în conjectura Collatz ( $3 \cdot n + 1$ ), pentru anumiți  $n$   
numărul de pași până la 1 ar putea să nu existe (infinit)

– când domeniul de definiție al funcției e foarte mare sau nelimitat,  
dar reprezentăm funcția explicit doar pentru valorile de interes

Exemplu: populația unei localități

posibil să nu știm populația pentru toate localitățile

dacă argumentul e un șir, nu orice șir e nume de localitate



## Dicționare: funcții parțiale în ML

Un *dicționar* (*asociere*) memorează *perechi* care asociază o *cheie* (primul element) cu o *valoare* (al doilea element)

ML: modulul Map e parametrizat (ca la mulțimi) cu un modul care definește tipul (ordonat) al *cheilor*. Nu precizează tipul valorilor.

module M = Map.Make(String)      creează un modul pentru asocieri între *chei* șiruri (string) și un *tip valoare neprecizat* încă  
Not.: key: tipul cheilor    'a t: tipul dicționar cu valori de tip 'a

M.empty    dicționarul vid (nicio asociere)

M.add: key -> 'a -> 'a t -> 'a t    `let m1 = M.add "x" 5 M.empty`  
ia o cheie, valoare și dicționar, creează un dicționar care are în plus noua asociere (suprascrie eventuala veche asociere pentru cheie)

M.remove : key -> 'a t -> 'a t    `let m2 = M.remove "y" m1`  
creează un nou dicționar fără cheia dată (fie că exista sau nu)

## Funcții cu dicționare

Ca exemplu: `let m3 = M.singleton "x" 5 |> M.add "y" 3`

`M.fold: (key -> 'a -> 'b -> 'b) -> 'a t -> 'b -> 'b`

Ca la mulțimi, dar elementul curent parcurs e dat de *doi* parametri: cheia (key) și valoarea ('a). Produce o valoare arbitrară (tipul 'b).

`M.fold (fun k v acc -> (k, v)::acc) m3 []`

dă lista de perechi din dicționar: `[("x",5);("y",3)]`

Există predefinită: `M.bindings m3 (* [("x",5);("y",3)] *)`

`M.bindings: 'a t -> (key * 'a) list`

*Căutăm* valoarea asociată unei chei în dicționar:

`M.find "x" m` returnează întregul 5

`M.find "y" m` generează *excepția* `Not_found`

## Lucrul cu excepții

O *excepție* este o condiție specială care întrerupe calculul normal. Funcția semnalează că nu poate returna un rezultat dacă nu e *tratată*, se abandonează execuția programului altfel, codul de *tratare a excepției* stabilește ce se face

Unele funcții standard *generează* excepții:

```
List.hd [] produce Exception: Failure "hd"  
char_of_int 300 dă Invalid_argument "char_of_int"
```

Operații matematice pot genera excepții:

```
1 / 0 produce Exception: Division_by_zero
```

Aceste excepții (primele 2 cu parametru șir, ultima fără parametru) și altele sunt predefinite în modulul Pervasives deschis implicit

Putem genera excepții cu funcția `raise` (parametru: excepție):

```
raise Not_found sau raise (Failure "gresit") etc.
```

```
failwith "mesaj" e echivalent cu raise (Failure "mesaj")  
invalid_arg "msg" e la fel cu raise (Invalid_argument "msg")
```

## Tratarea excepțiilor

Trebuie să știm *ce excepții* pot genera funcțiile pe care le folosim și să le *tratăm* corespunzător

Sintaxa: `try expresie` e tot o formă de expresie  
`with tipar`

unde *tipar* tratează una sau mai multe excepții și are forma

| *excepție-1* -> *expresie-1* (valoarea în acest caz)

| *excepție-2* -> *expresie-2* (valoarea în cazul 2)

...

Dacă *expresie* se evaluează normal, ea dă rezultatul;  
altfel, dacă apare *excepție-k* se evaluează *expresie-k*  
pe toate ramurile, expresiile au același tip cu cea din `try expresie`

```
fun x m -> try M.find x m  
         with Not_found -> 0 (* pt. dict. cu val. int *)
```

Excepțiile se propagă, terminând fiecare funcție, până când sunt “prinse” de un bloc de tratare – altfel, programul e abandonat.

## De la liste de asocieri la dicționare

E natural să construim un dicționar de la o listă de perechi.

Ea ar putea conține duplicate pentru primul element:

```
let lst = [("x", 5); ("y", 3); ("x", 2); ("a", 2)]
```

Putem să considerăm:

- ultima valoare (adăugăm necondiționat)

```
List.fold_left (fun dct (k,v) -> M.add k v dct) M.empty lst
```

- prima valoare (adăugăm doar dacă nu există)

```
List.fold_left (fun dct (k,v) ->
```

```
  if M.mem k dct then dct else M.add k v dct) M.empty lst
```

- toate valorile: o listă sau mulțime

```
let addnew dict (k,v) =
```

```
  let lst = try M.find k dict  
            with Not_found -> []
```

```
  in M.add k (v :: lst) dict;;
```

```
List.fold_left addnew M.empty lst
```

## Relații cu ajutorul dicționarelor

Am văzut că o *relație*  $R \subseteq A \times B$  poate fi privită ca o *funcție*  $f_R : A \rightarrow \mathcal{P}(B)$  de la  $A$  la mulțimea părților lui  $B$ :

$$f_R(x) = \{y \in B \mid (x, y) \in R\}$$

Dicționarul va fi atunci de la  $A$  la *mulțimi* de elemente din  $B$

```
module M = Map.Make(String) (* dicționar pe siruri *)
```

```
module S = Set.Make(String) (* mulțimea de valori *)
```

```
let addpair m (x, y) =
```

```
  let oldset = try M.find x m (* mulțimea asociată cu x *)
```

```
  with Not_found -> S.empty (* nu e, deci mulțimea vidă *)
```

```
  in M.add x (S.add y oldset) m
```

```
(* creează dicționar din lista *)
```

```
let setmap_of_pairs = List.fold_left addpair M.empty
```

```
setmap_of_pairs [("tms", "arad"); ("tms", "lugoj)];;
```

```
asociază "tms" cu mulțimea {"arad", "lugoj"}
```

## Relații binare pe o mulțime

Următoarele proprietăți sunt definite pentru relații binare pe  $\mathcal{O}$  (aceeași) mulțime  $X$ :  $R \subseteq X \times X$

*reflexivă*: pentru orice  $x \in X$  avem  $(x, x) \in R$

*ireflexivă*: pentru orice  $x \in X$  avem  $(x, x) \notin R$

*simetrică*: pentru orice  $x, y \in X$ ,  
dacă  $(x, y) \in R$  atunci și  $(y, x) \in R$

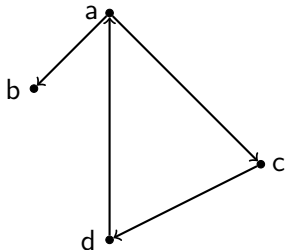
*antisimetrică*: pentru orice  $x, y \in X$ ,  
dacă  $(x, y) \in R$  și  $(y, x) \in R$ , atunci  $x = y$

*tranzitivă*: pentru orice  $x, y, z \in X$ ,  
dacă  $(x, y) \in R$  și  $(y, z) \in R$ , atunci  $(x, z) \in R$

## Relații binare și grafuri

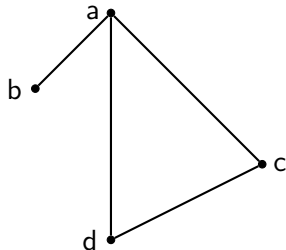
O relație binară pe o mulțime  $X$  poate fi reprezentată ca un *graf* cu  $X$  ca mulțime de noduri:

graf orientat: relație oarecare



$$R = \{(a,b), (a,c), (c,d), (d,a)\}$$

graf neorientat: relație simetrică



$$R = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (c,a), (c,d), (d,a), (d,c)\}$$



## Relații de echivalență

O relație e *de echivalență* dacă e *reflexivă*, *simetrică* și *tranzitivă*

Relația de egalitate e (evident) o relație de echivalență.

Relația de congruență modulo un număr:

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ dacă } n \mid a - b \text{ (divide diferența)}$$

Echivalența între tipuri (la inferența de tipuri în ML):

Dacă  $f$  e de tip  $'a \rightarrow 'b \rightarrow 'a$  (arg.1 și rezultatul au același tip) și dăm prim argument un `int`, și rezultatul va fi tot `int`

*Clasa de echivalență* a lui  $x$  e mulțimea elementelor aflate în relație cu  $x$

$$\{y \mid (y, x) \in R\} \quad \text{notată } \hat{x} \text{ sau } [x]$$

O relație de echivalență pe  $X$  definește o *partiție* a lui  $X$  (două clase de echivalență sunt fie identice, fie disjuncte)

Demonstrați!

## Relații de ordine stricte și totale

O relație  $\prec$  e o *ordine strictă* dacă e *ireflexivă* și *tranzitivă*  
nu există  $x$  cu  $x \prec x$   
dacă  $x \prec y$  și  $y \prec z$  atunci  $x \prec z$

Exemple: relațiile  $<$  și  $>$  între numere (întregi, reale, etc.)  
Relația “descendent” între persoane

O relație  $\preceq$  e o *ordine totală* dacă e *reflexivă*, *antisimetrică* (dacă  $x \preceq y$  și  $y \preceq x$  atunci  $x = y$ ), *tranzitivă*, și în plus  
oricare două elemente sunt *comparabile*, adică pentru orice  $x, y$   
avem  $x \preceq y$  sau  $y \preceq x$

Exemple: relațiile  $\leq$  și  $\geq$  între numere (întregi, reale, etc.)

## Relații de ordine parțială

În practică apar adesea relații de ordine care nu sunt totale:  
clasament pe grupe, dar nu și între grupe diferite  
știm ordinea sosirii mesajelor, dar nu și ordinea trimiterii lor  
în expresia  $f(x) + g(x)$ ,  $f$  și  $g$  se apelează *înainte* de adunare,  
dar nu știm dacă se evaluează întâi  $f$  sau  $g$

O relație e o *ordine parțială* (non-strictă), dacă e  
*reflexivă*, *antisimetrică* și *tranzitivă*

relația de divizibilitate între întregi

relația de incluziune  $\subseteq$  pe mulțimea părților

*Orice ordine totală e și o ordine parțială* (dar nu și reciproc).

*Orice ordine parțială induce o ordine strictă, și reciproc:*

Definim:  $a \prec b$  dacă  $a \preceq b$  și  $a \neq b$

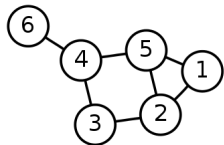
Invers, definim  $a \preceq b$  dacă  $a \prec b$  sau  $a = b$

## Noțiunea de punct fix

$x \in X$  e *punct fix* pentru funcția  $f : X \rightarrow X$  dacă  $f(x) = x$ .  
(privind  $f$  ca o transformare, ea nu îl modifică pe  $x$ )

Exemplu: fie un graf  $G = (V, E)$ , și pentru  $X \subseteq V$  funcția  
 $f(X) = X \cup \bigcup_{v \in X} \text{vecini}(v)$  (adăugăm la  $X$  toți vecinii)

$f(U) = U \Rightarrow$  din nodurile  $U$ , urmărind vecinii nu găsim noduri noi



Pornind de la  $S_0 = \{6\}$  calculăm  $S_1 = f(S_0) = \{6, 4\}$ ,  $S_2 = \{6, 4, 3, 5\}$ ,  $S_3 = \{6, 4, 3, 5, 1, 2\}$ ,  $S_4 = S_3$ . Am atins un punct fix: avem toate nodurile care pot fi atinse din 6.

Multe prelucrări repetitive pot fi definite ca transformări care se opresc când atingem un *punct fix*

care sunt toate configurațiile posibile într-un joc?

care sunt toate variabilele de care depinde o variabilă dată? etc.

Existența unui punct fix e legată de *ordini parțiale* și *latice*.

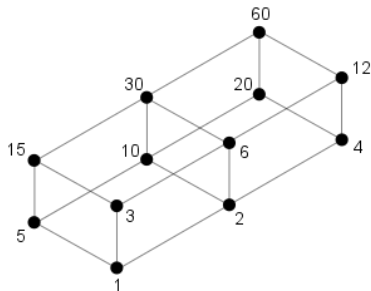
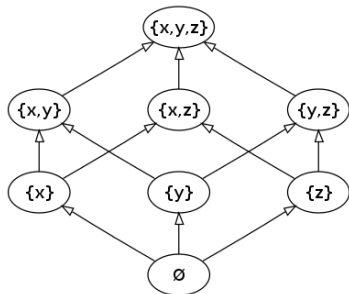
# Latice

O *latice* e o mulțime *parțial ordonată*, în care orice două elemente au un *minorant* și un *majorant*.

(elemente mai mici, respectiv mai mari în ordine decât cele două).

Ex: mulțimea părților unei mulțimi (ordine:  $\subseteq$ ; minor./maj.:  $\cap$ ,  $\cup$ )

Ex: mulțimea divizorilor unui număr (c.m.m.d.c, c.m.m.m.c)



Aceste exemple sunt chiar *latice complete*.

Imagine: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hasse\\_diagram\\_of\\_powerset\\_of\\_3.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hasse_diagram_of_powerset_of_3.svg)

[http://en.wikipedia.org/wiki/File:Lattice\\_of\\_the\\_divisibility\\_of\\_60.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Lattice_of_the_divisibility_of_60.svg)

## Lattice complete și puncte fixe

O lattice  $L$  e *completă* dacă orice mulțime  $S \subseteq L$  are un cel mai mic majorant (supremum) și un cel mai mare minorant (infimum).

Sunt condiții mai puternice: pentru orice *submulțime* (și infinită); avem o ordine între majoranți/minoranți, și un *cel mai mic/mare*.

⇒ Luând  $S = L$ , rezultă că  $L$  are un element minim și unul maxim

*Teorema de punct fix (Knaster-Tarski):*

Fie  $f$  o funcție *monotonă* pe o *lattice completă*.

Atunci *mulțimea punctelor fixe* a lui  $f$  e tot o *lattice completă*.

*Corolar:* O funcție monotonă pe o lattice completă are un *punct fix minimal* și un *punct fix maximal*.

se obțin pornind de la  $0, f(0), f(f(0)), \dots$  resp.  $M, f(M), f(f(M)), \dots$   
unde  $0$  și  $M$  sunt elementul cel mai mic respectiv cel mai mare

Pentru orice  $x$ , șirul  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  ajunge la un punct fix.

## Punctul fix în ML

Dacă șirul  $x, f(x), f(f(x)), \dots$  atinge un punct fix, putem scrie:

```
let rec fix f x =  
  let nxt = f x in  
  if nxt = x then x else fix f nxt
```

`fix f x` compară  $f(x)$  cu  $x$ . Dacă sunt egale,  $x$  e punct fix, și e returnat. Dacă nu, reapelăm recursiv cu valoarea  $f(x)$ . Apelul al  $n$ -lea va avea argumentul  $f^{n-1}(x)$  și îl compară cu  $f^n(x)$ . Dacă există  $n$  cu  $f^{n-1}(x) = f^n(x)$ , va fi găsit,  $f^{n-1}(x)$  e punct fix.

Putem rescrie, folosind o funcție ajutătoare cu doar un parametru (nu mai trebuie repetat la apel parametrul `f`):

```
let fix f =  
  let rec fix1 x =  
    let nxt = f x in  
    if nxt = x then x else fix1 nxt  
  in fix1
```

## Inversa și compunerea de relații

*Inversa* unei relații  $R \subseteq A \times B$  e relația  $R^{-1} \subseteq B \times A$ , cu  $(y, x) \in R^{-1}$  dacă și numai dacă  $(x, y) \in R$

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Fie două relații  $R_1 \subseteq A \times B$  și  $R_2 \subseteq B \times C$ .

*Compunerea*  $R_2 \circ R_1 \subseteq A \times C$  e relația

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid \text{există } y \in B \mid (x, y) \in R_1 \text{ și } (y, z) \in R_2\}$$

La fel ca la funcții, scriem  $R_2 \circ R_1$  și vedem că pentru  $x \in A$  găsim întâi  $y \in B$  și apoi  $z \in C$ .

Se poate vedea simplu că  $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Pentru o relație de echivalență,  $R = R^{-1}$  (de ce? arătați!)

$R$  e tranzitivă dacă și numai dacă  $R \circ R \subseteq R$  (de ce? arătați!)

Pentru o relație binară  $R \subseteq A \times A$ , se notează  $R^2 = R \circ R$ , etc.



## Închiderea tranzitivă a unei relații

Dintr-o relație  $R$ , putem defini o nouă relație, prin “intermediari”, ca în condiția de tranzitivitate.

Ex.: într-un graf, avem *muchii* și *drumuri* (relații între noduri):

Un drum e format din una sau mai multe muchii:

$drum(X, Y)$  dacă  $muchie(X, Y)$

sau dacă  $muchie(X, Z)$  și  $muchie(Z, Y)$

sau dacă  $muchie(X, Z)$  și  $muchie(Z, U)$  și  $muchie(U, Y)$  ...

Relația *drum* include relația *muchie* și e tranzitivă.

Sau, fie relația  $copil(X, Y)$  ( $X$  e copilul lui  $Y$ ):

Definim relația  $desc(X, Y)$  dacă  $copil(X, Y)$  (1)

*descendent*:  $desc(X, Z)$  dacă  $desc(X, Y)$  și  $desc(Y, Z)$  (2)

Relația *desc* include relația *copil* (1) și e tranzitivă (2).

**Închiderea tranzitivă** a unei relații  $R \subseteq A \times A$  e relația **tranzitivă minimală**  $R^+$  astfel ca  $R \subseteq R^+$

Putem calcula  $R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = R \cup R^2 \cup \dots$

$$R^2 = R \circ R$$

$$R^3 = R \circ R \circ R$$

## Închiderea tranzitivă (cont.)

Un exemplu (fără cicluri):

$\text{copil}(\text{ana}, \text{ion}), \text{copil}(\text{lia}, \text{ion}), \text{copil}(\text{ion}, \text{mara}), \text{copil}(\text{mara}, \text{eva})$ .

$\text{copil}^2: \text{desc}(\text{ana}, \text{mara}), \text{desc}(\text{lia}, \text{mara}), \text{desc}(\text{ion}, \text{eva})$

$\text{copil}^3: \text{desc}(\text{ana}, \text{eva}), \text{desc}(\text{lia}, \text{eva})$ .

Nu sunt descendenți de ordin  $> 3$ .

Deci, relația  $\text{desc} = \text{copil} \cup \text{copil}^2 \cup \text{copil}^3$

Putem defini  $f(X) = R \cup (X \circ R)$ . Atunci  $f(R) = R \cup R^2$  și prin

inducție,  $f^n(R) = \bigcup_{k=1}^{n+1} R^k$ .

$f$  e monotonă: dacă  $X \subseteq Y$ ,  $X \circ R \subseteq Y \circ R$  și  $f(X) \subseteq f(Y)$ .

Deci  $f$  are un punct fix minimal, tocmai închiderea tranzitivă  $R^+$ , iar pentru o mulțime finită calculul are un număr finit de pași.