Logică și structuri discrete

Logică propozițională

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

28 octombrie 2013

Logica stă la baza informaticii

circuite logice: descrise în algebra booleană

calculabilitate: ce se poate calcula algoritmic?

metode formale: demonstrarea corectitudinii programelor

inteligența artificială: cum reprezentăm și deducem cunoștințe?

baze de date relaționale

Din istoria logicii

Aristotel (sec.4 î.e.n.): primul sistem de *logică formală* (riguroasă)

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1714): *logică computațională*
raționamentele logice pot fi reduse la *calcul matematic*

George Boole (1814-1864): *The Laws of Thought*:
logica modernă, algebră booleană (logică și mulțimi)

Gottlob Frege (1848-1925): *logica simbolică clasică*
Begriffsschift: formalizare a logicii ca fundament al matematicii

Bertrand Russell (1872-1970): *Principia Mathematica*
(cu A. N. Whitehead)
formalizare încercând să elimine paradoxurile anterioare

Kurt Gödel (1906-1978): *teoremele de incompletitudine* (1931):
nu există axiomatizare consistentă și completă a aritmeticii

Ce știm despre logică?

Știm deja: operatorii logici ȘI ($\wedge$), SAU ($\vee$), NU ($\neg$)

Tabele de adevăr:

p	$\neg p$
F	T
T	F

negație $\neg$ NU

	$p \wedge q$	q: F	q: T
p	F	F	F
p	T	F	T

conjuncție $\wedge$ ȘI

	$p \vee q$	q: F	q: T
p	F	F	T
p	T	T	T

disjuncție $\vee$ SAU

Logica propozițională

Unul din cele mai simple *limbaje* (limbaj $\Rightarrow$ putem *exprima* ceva)
așa cum codificăm numere, etc. în *biți*
putem exprima probleme prin *formule* în logică

Discutăm:

Cum definim o formulă în logică:
forma ei (*sintaxa*) vs. înțelesul ei (*semantica*)

Ce sunt *demonstrațiile* și *raționamentul logic* ?
cum putem demonstra? se poate demonstra (sau nega) orice?

Cum *reprezentăm* o formulă? pentru a opera eficient cu ea

Cum reprezentăm și manipulăm noțiuni din informatică
(mulțimi, relații, automate) în logică?

Propoziții logice

O *propoziție* (logică) e o afirmație care e fie adevărată, fie falsă, dar nu ambele simultan.

Sunt sau nu propoziții:

$2 + 2 = 5$

$\mathrm{x} + 2 = 4$

Toate numerele prime mai mari ca 2 sunt impare.

Dacă $x < 2$, atunci $x^2 < 4$

Sintaxa logicii propoziționale

Limbajul logicii propoziționale: format din *simboluri* pentru
- *propoziții*: p, q, r, etc.
- *operatori* (conectori logici): $\neg$, $\rightarrow$
- paranteze (   )

Formulele logicii propoziționale:
- orice propoziție atomică este o formulă
- dacă α este o formulă, atunci $(\neg\alpha)$ este o formulă.
- dacă α și β sunt formule, atunci $(\alpha \rightarrow \beta)$ este o formulă.

definiție prin *inducție structurală* (de la simplu la complex)

Operatorii cunoscuți pot fi definiți folosind $\neg$ și $\rightarrow$:
- $\alpha \wedge \beta \stackrel{def}{=} \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$
- $\alpha \vee \beta \stackrel{def}{=} \neg\alpha \rightarrow \beta$
- $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{def}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

fără paranteze redundante: $\neg$ mai prioritar ca $\rightarrow$

Sintaxa vs. semantică

Definiția anterioară spune *care* sunt formulele logicii propoziționale

Sintaxa = o mulțime de reguli care definește un limbaj

NU spune *ce înseamnă* formulele respective

Semantica: definește înțelesul unei construcții (limbaj)

Implicația logică $\rightarrow$

$p \rightarrow q$ numită și *condițional(ă)*
p: *antecedent* (sau *ipoteză*)
q: *consecvent* (sau *concluzie*)

Semnificație: dacă p e adevărat, atunci q e adevărat (if-then)
dacă p nu e adevărat, nu știm nimic despre q (poate fi oricum)

Deci, $p \rightarrow q$ e fals doar dacă p e adevărat și q e fals
(q ar trebui să fie adevărat)

Tabelul de adevăr:

	$p \rightarrow q$	q: F	q: T
p	F	T	T
	T	F	T

Exprimat cu alți conectori: $p \rightarrow q \quad = \quad \neg p \vee q$

Despre implicație...

În limbajul natural, “dacă ... atunci” denotă deobicei *cauzalitate*

în logica matematică, $\rightarrow$ *NU înseamnă cauzalitate*

putem scrie $p \rightarrow q$ pentru p și q fără vreo legătură

dar în demonstrații, vom folosi de regulă ipoteze *relevante*

Vorbind, spunem adesea “dacă” gândind “dacă și numai dacă”
(echivalență, o noțiune mai puternică!)

ATENȚIE: *fals implică orice!* (vezi tabelul de adevăr)
$\Rightarrow$ un raționament cu o verigă falsă poate duce la orice concluzie

Despre implicație...

Fiind dată o implicație $p \to q$, definim:

reciproca: $q \to p$

inversa: $\neg p \to \neg q$

contrapozitiva: $\neg q \to \neg p$

Contrapozitiva e *echivalentă* cu formula inițială (directa).
Celălalte două, NU!

Discutați: Dacă depășesc viteza, iau amendă.

Calculul în logică: funcții de adevăr

O *funcție de adevăr* v: atribuie la orice formulă o *valoare de adevăr* $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ astfel încât:

$v(p)$ e definită pentru fiecare propoziție atomică p.

$$v(\neg\alpha) = \begin{cases} \mathrm{T} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathrm{T} \end{cases}$$

$$v(\alpha \to \beta) = \begin{cases} \mathrm{F} & \text{dacă } v(\alpha) = \mathrm{T} \text{ și } v(\beta) = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Exemplu: dacă mulțimea de propoziții atomice e $\{a, b, c\}$
și alegem $v(a) = \mathrm{T}$, $v(b) = \mathrm{F}$, $v(c) = \mathrm{T}$
atunci v poate fi calculat pentru orice formulă cu a, b, c:

$(a \to b) \to c$:

avem $v(a \to b) = \mathrm{F}$ pentru că $v(a) = \mathrm{T}$ și $v(b) = \mathrm{F}$
și atunci $v((a \to b) \to c) = \mathrm{T}$ pentru că $v(a \to b) = \mathrm{F}$.

Interpretări ale unei formule

O *interpretare* a unei formule = o evaluare pentru propozițiile ei

O intrepretare *satisface* o formulă dacă o evaluează la T.
(interpretarea e un *model* pentru formula respectivă).

Exemplu: interpretarea $v(a) = \mathrm{T}, v(b) = \mathrm{F}, v(c) = \mathrm{T}$
satisface formula $a \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c)$.
Interpretarea $v(a) = \mathrm{T}, v(b) = \mathrm{T}, v(c) = \mathrm{T}$ nu o satisface.

O formulă poate fi:
- *tautologie* (*validă*): adevărată în toate interpretările
- *realizabilă* (en. satisfiable): adevărată în cel puțin o interpretare
- *contradicție* (nerealizabilă): falsă în orice interpretare
- *contingentă*: adevărată în unele interpretări, falsă în altele

(nici tautologie, nici contradicție)

Tabela de adevăr

Tabela de adevăr prezintă valoarea de adevăr a unei formule în *toate interpretările posibile*

2^n interpretări dacă formula are n propoziții

Două formule sunt *echivalente* dacă au *același tabel de adevăr*

Două formula ϕ și ψ sunt echivalente dacă $\phi \leftrightarrow \psi$ e o tautologie

Exemple de tautologii

$$a \vee \neg a$$

$$\neg\neg a \leftrightarrow a$$

$$\neg(a \vee b) \ \leftrightarrow \ \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) \ \leftrightarrow \ \neg a \vee \neg b$$

(regulile lui de Morgan)

$$(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow c) \ \leftrightarrow \ (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge c)$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow c) \ \leftrightarrow \ (a \wedge b) \rightarrow c$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

$(p \wedge q) \rightarrow p$ și $(p \rightarrow q) \rightarrow q)$

$$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Algebra Booleană

Pe mulțimi, $\cup$, $\cap$ și complementul formează o algebră booleană.
Tot o algebră booleană formează în logică și $\wedge$, $\vee$ și $\neg$:

Comutativitate: $A \vee B = B \vee A \qquad A \wedge B = B \wedge A$

Asociativitate: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ și
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

Distributivitate: $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ și
$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Identitate: există două valori (aici F și T) astfel ca:
$A \vee \mathrm{F} = A \qquad A \wedge \mathrm{T} = A$

Complement: $A \vee \neg A = \mathrm{T} \qquad A \wedge \neg A = \mathrm{F}$

Alte proprietăți (pot fi deduse din cele de mai sus):

Idempotență: $A \wedge A = A \qquad A \vee A = A$

Absorbție: $A \vee (A \wedge B) = A \qquad A \wedge (A \vee B) = A$
$\neg A \vee (A \wedge B) = \neg A \vee B$ (din distributivitate și complement)

Consecința semantică

O mulțime de formule $H = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *implică* o formulă φ

$$H \models \varphi$$

dacă orice funcție de adevăr care satisface H (formulele din H) satisface φ

Pentru a stabili consecința semantică trebuie să *interpretăm* formulele (cu valori/funcții de adevăr)

$\Rightarrow$ lucrăm cu *semantica* (înțelesul) formulelor

Deducții logice

O variantă de a stabili adevărul unei formule în mod *sintactic* (folosind doar structura ei)

bazată pe o *regulă de inferență* (de deducție)

$$\frac{\varphi_1 \qquad \varphi_1 \to \varphi_2}{\varphi_2} \qquad \textit{modus ponens}$$

(din φ_1 și $\varphi_1 \to \varphi_2$ deducem φ_2)

și un set de *axiome* (formule care pot fi folosite ca premise/ipoteze)
A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

Alte reguli de deducție

Modus ponens e suficient pentru a formaliza logica propozițională dar sunt și alte reguli de deducție care simplifică demonstrațiile

$$\frac{p \to q \qquad \neg q}{\neg p}$$ *modus tollens*

$$\frac{p}{p \vee q}$$ *generalizare (introducerea disjuncției)*

$$\frac{p \wedge q}{p}$$ *specializare (simplificare)*

$$\frac{p \vee q \qquad \neg p}{q}$$ *eliminare (silogism disjunctiv)*

$$\frac{p \to q \qquad q \to r}{p \to r}$$ *tranzitivitate (silogism ipotetic)*

Deducție

Fie H o mulțime de formule. O *deducție* (demonstrație) din H e un șir de formule $A_1, A_2, \cdots, A_n$, astfel ca:

1. A_i este o *axiomă*, sau
2. A_i este o *ipoteză* (o formulă din H), sau
3. A_i rezultă prin *modus ponens* din A_j, A_k anterioare $(j, k < i)$

Spunem că A_n *rezultă* din H (e *deductibil*, e *consecință*): $H \vdash A_n$

Exemplu: demonstrăm că $\varphi \to \varphi$

(1) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi))$	A1
(2) $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$	A2
(3) $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	MP(1,2)
(4) $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	A1
(5) $\varphi \to \varphi$	MP(3,4)

Verificarea unei demonstrații e un proces simplu, mecanic (cele 3 reguli de mai sus), chiar dacă găsirea demonstrației poate fi dificilă.

Consistență și completitudine

$H \vdash \varphi$: *deducție* (pur sintactică, din axiome și reguli de inferență)
$H \models \varphi$: *implicație, consecință semantică* (tabele de adevăr)
Care e legătura între ele ?

Consistență: Dacă H e o mulțime de formule, și α este o formulă astfel ca $H \vdash \alpha$, atunci $H \models \alpha$.
(Orice teoremă în logica propozițională este o tautologie).

Completitudine: Dacă H e o mulțime de formule, și α este o formulă astfel ca $H \models \alpha$, atunci $H \vdash \alpha$.
(Orice tautologie este o teoremă).

Ca să demonstrăm o formulă, putem arăta că e *validă*.
Pentru aceasta, verificăm că *negația ei nu e realizabilă*

Forma normală conjunctivă

Conjunctive normal form (CNF)

Formula scrisă ca o *conjuncție* de *clauze*
Fiecare clauză e o *disjuncție* de *literale*
(propoziție atomică sau negația ei)

$$
\begin{aligned}
&(a \vee \neg b \vee \neg d)\\
\wedge\ &(\neg a \vee \neg b)\\
\wedge\ &(\neg a \vee c \vee \neg d)\\
\wedge\ &(\neg a \vee b \vee c)
\end{aligned}
$$

Similar: forma normală *disjunctivă* (disjuncție de conjuncții)

Problemă: cum convertim o funcție în CNF?
ducem negația înăuntru (regulile lui de Morgan)
ducem disjuncția înăuntru (folosind distributivitatea)