Logică și structuri discrete

Logica predicatelor

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

11 noiembrie 2013

Logică: recapitulare

Folosim logica pentru a *formaliza* raționamente
= a le exprima *riguros*

Logica ne permite să facem demonstrații (deducții)
din *axiome* (totdeauna adevărate)
și *ipoteze* (considerate adevărate în problema dată)
folosind *reguli de inferență* (de deducție)

$$\frac{p \qquad p \to q}{q} \qquad \textit{modus ponens}$$

Modus ponens e suficient pentru a formaliza logica propozițională
dar se pot de fini și alte reguli de deducție valide.
Astfel putem simplifica demonstrațiile.

Logica propozițională e insuficientă

Un exemplu clasic:

(1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Seamănă cu *modus ponens*

dar, premisa din (1) ("toți oamenii")
nu e la fel cu (2) (Socrate, un anumit om)

În logica clasică: *silogisme* (anumite tipare de reguli de inferență)

Aristotel, stoici

în logica modernă: *logica predicatelor* (logica de ordinul I)

Gottlob Frege, Charles Peirce (sec. 19)

Silogisme categorice

= reguli de inferență compuse din 3 părți:

(1) premisa *majoră*: Toți oamenii sunt muritori
(2) premisa *minoră*: Toți grecii sunt oameni
(3) concluzia: Toți grecii sunt muritori

Fiecare e o *propoziție categorică*, despre două categorii A și B.

Fiecare premisă are o categorie în comun cu concluzia:
termenul *major* (muritori), respectiv termenul *minor* (grecii);
a treia categorie e termenul *mediu* (de legătură): oameni.

4 *tipuri* de propoziții categorice:

cod	cuantificator	relație	tip
A	toți	sunt	afirmativ universal
E	niciun	nu e	negativ universal
I	unii	sunt	afirmativ particular
O	unii	nu sunt	negativ particular

A: Toți oamenii sunt muritori. E: Niciun om nu e perfect.
I: Unii oameni sunt înalți. O: Unii oameni nu sunt cinstiți.

Silogisme și exemple

Notăm S *subiectul* concluziei, P *predicatul* ei, M termenul mediu.
Premisa majoră leagă M și P, iar cea minoră pe M și S.

Rolurile subiect-predicat în premise determină 4 *figuri*

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4
Premisa majoră	M-P	P-M	M-P	P-M
Premisa minoră	S-M	S-M	M-S	M-S

Tipuri de silogisme: $\begin{cases} \text{3 litere (AEIO) pentru cele 3 propoziții} \\ \text{o cifră (1-4) pentru figură} \end{cases}$

$\Rightarrow 4^4 = 256$ combinații, dar numai 6 valide pentru fiecare figură.

Exemple: AAA-1: cel anterior (grecii ... oameni ... muritori)

EAE-1: Niciun examen nu e ușor.
Parțialele sunt examene.
Rezultă: parțialele nu sunt ușoare.

???-?: Toate notițele utile sunt corecte.
Unele notițe nu sunt corecte.
Unele notițe nu sunt utile.

Spre logica predicatelor

Revenim la exemplul:

(1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Am putea reformula (1):

Dacă X e om, atunci X e muritor.

sau mai precis

Pentru orice X, dacă X e om, atunci X e muritor

$\Rightarrow$ avem nevoie de

variabile (X) care să ia valori într-un anumit univers
proprietăți (om, muritor) sau *relații* între variabile
funcții, pentru atributele unei variabile (ex. culoare, nota)
cuantificatori universal (toți), existențial (unii)

Exemple: Ce vrem să exprimăm

Proprietăți mai complexe decât în logica propozițională:

$member(x, A) \rightarrow member(x, union(A, B))$ mulțimi

$leq(x, y) \rightarrow leq(f(x), f(y))$ funcție monotonă

$$apel(nrX, nrY) \wedge eq(rețea(nrX), rețea(nrY)) \wedge prepay(nrX) \\ \rightarrow eq(cost(nrX, nrY), 0.11)$$

$$apel(nrX, nrY) \wedge fix(nrX) \wedge fix(nrY) \rightarrow eq(cost(nrX, nrY), 0.04)$$

Avem:

variabile (x, y, nrX, nrY)
funcții (*union*, f, *rețea*, *cost*)
predicate (*member*, *leq*, *apel*, *prepay*, *fix*)
(egalitatea e un predicat considerată uneori separat)

Un *predicat* = o afirmație relativ la una sau mai multe variabile, care, dând valori variabilelor, poate lua valoarea adevărat sau fals.

Limbajul logicii predicatelor (logica de ordinul I)

Simboluri:

- parantezele ( )
- conectorii $\neg$ și $\rightarrow$
- cuantificatorul $\forall$ (universal)
- o mulțime de identificatori $v_0, v_1, \cdots$ pentru *variabile*
- pentru orice $n \geq 1$ o mulțime de simboluri de *funcții* n-are
- o mulțime (posibil vidă) de simboluri pentru *constante*

  constantele pot fi privite și ca funcții de 0 argumente
- pentru orice $n \geq 0$ o mulțime de simboluri de *predicate* n-are

  propozițiile pot fi privite ca predicate de 0 argumente

Limbajele de ordinul I cu egalitate:

conțin și $=$ ca simbol special pe lângă cele de mai sus.

Termeni și formule

Termenii unui limbaj de ordinul I (definiți structural recursiv)
orice simbol de variabilă v_n
orice simbol de constantă c
$f(t_1, \cdots, t_n)$
dacă f e un simbol de funcție n-ară și $t_1, \cdots, t_n$ sunt termeni

Formule bine formate (well-formed formulas):
$P(t_1, \cdots, t_n)$ cu P predicat n-ar; $t_1, \cdots, t_n$ termeni
$t_1 = t_2$ cu t_1, t_2 termeni (în limbaje cu egalitate)
$\neg\alpha$ unde α este o formulă
$\alpha \to \beta$ unde α, β sunt formule
$\forall v\, \varphi$ unde v e o variabilă și φ e o formulă

"de ordinul I" $\Rightarrow$ se cuantifică doar *variabile*, nu și predicate
("de ordin superior")

Despre cuantificatori

În formula $\forall v \varphi$, variabila v se numește *legată*

Variabilele care nu sunt legate se numesc *libere*

O formulă *depinde* de variabilele sale libere
(ele pot fi *substituite* cu termeni arbitrari)
Nu depinde însă de variabilele legate
nu pot fi substituite, înțelesul lor e "legat" de cuantificator
("pentru orice", "există")
pot fi redenumite, fără a schimba înțelesul formulei

Cuantificatorul existențial $\exists$

Notăm: $\exists x \varphi \stackrel{def}{=} \neg \forall x (\neg \varphi)$
(cei doi cuantificatori sunt *duali*)
putem scrie și $\forall x \varphi = \neg \exists x (\neg \varphi)$

Formalizarea limbajului natural

1. Fiecare investitor a cumpărat acțiuni sau obligațiuni.
2. Dacă indicele Dow Jones scade, toate acțiunile mai puțin aurul scad.
3. Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.
4. Orice investitor care a cumpărat ceva care scade nu e bucuros.
5. Dacă indicele Dow Jones scade și trezoreria crește dobânda,
toți investitorii bucuroși au cumpărat ceva acțiuni de aur.

Exemplu: `http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`

Atenție la cuantificatori!

Când formalizăm:

cuantificatorul universal ("toți") va cuantifica o implicație:
"Toți studenții sunt tineri": $\forall x(student(x) \rightarrow tânăr(x))$

cuantificatorul existențial ("unii", "există") cuantifică o conjuncție
"Unii tineri sunt studenți.": $\exists x(tânăr(x) \wedge student(x))$

Atenție, cuantificatorul universal e distributiv față de conjuncție:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$$

dar cuantificatorul existențial NU e distributiv față de conjuncție:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x) \not\leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$$

(avem implicație, dar nu și invers, poate să nu fie același x !)

Distributivitatea față de disjuncție: da pentru $\exists$, nu pentru $\forall$

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un înțeles pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I pt. limbajul de predicate $\mathcal{L}$ constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I
  (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
- pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f_I : U^n \to U$
- pentru orice simbol de predicat n-ar P, o submulțime $P_I \subseteq U^n$.
  (*interpretăm* fiecare simbol din formulă)

Exemplu:

$\forall x. P(x, x)$ reflexivitate

$\forall x. \forall y. \forall z. P(x, y) \wedge P(y, z) \to P(x, z)$ tranzitivitate

De exemplu: universul U = numere reale; predicatul P: relația $\leq$

$\forall x. \forall y. P(x, y) \to \exists z. P(x, z) \wedge P(z, y)$

găsiți două interpretări în care e adevărat / fals ?

Interpretări, atribuiri, valori de adevăr

Fie I o *interpretare* pentru limbajul $\mathcal{L}$ cu univers U
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile din $\mathcal{L}$.

O *atribuire* este o funcție $s : V \Rightarrow U$
(dă fiecarei *variabile libere* o *valoare* din *univers*)
$\Rightarrow$ din atribuirea s se poate obține valoarea pentru orice *termen*
(știm valoarea fiecărei variabile și înțelesul fiecărei funcții)

Interpretarea I dă și înțelesul fiecărui *predicat*
$\Rightarrow$ putem calcula *valoarea de adevăr* a unei formule
ca în cazul propozițional, dar trebuie definită *semantica lui* $\forall$

Notăm: $I \models s(\varphi)$ sau $I \models \varphi[s]$
dacă formula φ e *adevărată* în interpretarea I și evaluarea s

$I \models s(\forall x \varphi)$ dacă $I \models s_{x \leftarrow d}(\varphi)$ pentru orice $d \in U$, unde

$$s_{x \leftarrow d}(v) = \begin{cases} d & \text{dacă variabila } v \text{ este } x \\ \text{s(v)} & \text{pentru orice altă variabilă } v \end{cases} \quad \text{(x substituit cu d)}$$

Modele și tautologii

Notăm $I \models \varphi$ dacă $I \models s(\varphi)$ *pentru orice atribuire* s.
Spunem că I e un *model* pt. φ
sau că φ e *adevărată* în interpretarea (structura) I.

Obs: Dacă o formulă nu are variabile libere, valoarea ei de adevăr depinde doar de interpretare, nu și de vreo atribuire.

Def: O *tautologie* e o formulă adevărată în *orice* interpretare.

Spre deosebire de logica propozițională, în logica predicatelor, numărul interpretărilor e *infinit*
$\Rightarrow$ nu mai putem construi exhaustiv tabelul de adevăr.

E *esențial* deci să putem *demonstra* o formulă
(pornind de la axiome și regiuli de inferență)

Axiomele calculului predicatelor

Definim: variabila x se poate *substitui* cu termenul t în $\forall y \varphi$ dacă:
x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau
y nu apare în t și x se poate substitui cu t în φ
(nu putem substitui variabile legate)

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
A5: $\forall x\alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$, dacă x poate fi substituit cu t în α
A6: $\alpha \to \forall x\alpha$ dacă x nu apare liber în α

Pentru egalitate, adăugăm și
A7: $x = x$
A8: $x = y \to \alpha = \beta$
unde β se obține din α înlocuind oricâte din aparițiile lui x cu y.

Regula de inferență: tot *modus ponens* (e suficient)

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi* $A5$)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)

Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

$$\frac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi(x)}$$ *generalizare universală* (*vezi* $A6$)

unde c e o valoare arbitrară (nu apare în ipoteze)

Dacă φ e valabilă pentru o valoare arbitrară, e valabilă pentru orice x.

$$\frac{\exists x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere existențială*

Dacă există o valoare cu proprietatea φ, o instanțiem (cu un nume nou).

$$\frac{\varphi(c)}{\exists x\ \varphi(x)}$$ *generalizare existențială*

Dacă φ e adevărată pentru o anumită valoare, există o valoare care o face adevărată.

Consistență și completitudine

Ca și în logica propozițională:

demonstrația se face pur sintactic

determinarea *adevărului*: semantic, considerând *interpretări*

Fie H o mulțime de formule și φ o formulă.
Spunem că H implică φ ($H \models \varphi$) dacă pentru orice interpretare I,

$$I \models H \text{ implică } I \models \varphi$$

Calculul predicatelor de ordinul I este *consistent* și *complet* (la fel ca și logica propozițională):

$$H \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } H \models \varphi$$

Dar: relația de implicație logică e doar *semidecidabilă*

dacă o formulă e o tautologie, ea poate fi demonstrată

dar dacă nu e, încercarea de a o demonstra (sau o refuta) poate să continue la nesfârșit

Cum demonstrăm? Transformarea în formă clauzală

În logica propozițională, a fost utilă transformarea formulei în *forma normală conjunctivă* (*formă clauzală*)

În logica de ordinul I, transformarea necesită mai mulți pași, din cauza cuantificatorilor

Exemplu pentru formula:
$\forall x[\neg P(x) \to \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(1) Eliminăm toți conectorii în afară de $\wedge$, $\vee$, $\neg$:
$\forall x[\neg\neg P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y)))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(2) Ducem negațiile înăuntru, până la predicate:
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists x \neg P(x)$

(3) Redenumim variabilele cuantificate, cu nume unice în formulă
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists z \neg P(z)$

Forma clauzală (cont.)

(4) Eliminăm cuantificatorii existențiali (*skolemizare*)
Pentru $\exists y$ în interiorul lui $\forall x_1 \ldots \forall x_n$, introducem o *funcție* Skolem
$y = g(x_1, \ldots, x_n)$ (valoarea lui y depinde de $x_1, \ldots x_n$).
Pentru $\exists y$ în exterior, se alege o nouă *constantă* Skolem.
$\forall x[P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a)$

(5) Aducem la *forma normală prenex*: cuantificatorii $\forall$ în față
$\forall x([P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a))$

(6) Eliminăm prefixul cu cuantificatorii universali (devin impliciți)
$[P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a)$

(7) Convertim la forma normală conjunctivă
$(P(x) \vee D(x, g(x))) \wedge (P(x) \vee \neg E(f(x), g(x)))$
$\wedge (P(x) \vee \neg E(x, g(x))) \wedge \neg P(a)$

(8) Eliminăm $\wedge$ și scriem disjuncții ca și clauze separate