Exercițiu: Transformați în formă normală conjunctivă formula $\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee \neg(\neg p \vee (q \wedge r))))$.

Împingem negațiile spre interior:	$\neg(p \wedge q) \vee \neg(r \vee \neg(\neg p \vee (q \wedge r)))$
	$\neg p \vee \neg q \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee (q \wedge r)))$
Aplicăm distributivitatea:	$\neg p \vee \neg q \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r))$
Simplificăm $(\neg r \wedge (\neg p \vee r) = \neg r \wedge \neg p)$:	$\neg p \vee \neg q \vee (\neg r \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg p)$
Simplificăm prin absorbție $(\neg p \vee (A \wedge \neg p) = \neg p)$:	$\neg p \vee \neg q$
(cu $A = \neg r \wedge (\neg p \vee q)$)	

Aplicând operațiile în altă ordine, putem obține forme mai complicate. De exemplu, împingând spre interior întâi a doua negație de la stânga, și apoi prima:

	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee \neg(\neg p \vee (q \wedge r))))$
De Morgan	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee (p \wedge \neg(q \wedge r))))$
De Morgan	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee (p \wedge (\neg q \vee \neg r))))$
distributivitate	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee p \wedge \neg q \vee p \wedge \neg r))$
comutativitate (reordonare)	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee p \wedge \neg r \vee p \wedge \neg q))$
absorbție, $r \vee p \wedge \neg r = r \vee p$	$\neg((p \wedge q) \wedge (r \vee p \vee p \wedge \neg q))$
absorbție, $p \vee p \wedge \neg q = p$	$\neg(p \wedge q \wedge (r \vee p))$
absorbție, $p \wedge (p \vee r) = p$	$\neg(p \wedge q)$
De Morgan	$\neg p \vee \neg q$

Sau, dacă nu observăm absorbția:

	$\neg(p \wedge q \wedge (r \vee p))$
distributivitate	$\neg(p \wedge (q \wedge r \vee q \wedge p))$
distributivitate	$\neg((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge p))$
idempotență	$\neg((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q))$
De Morgan	$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Deși formula e în formă normală conjunctivă, se poate încă simplifica, dacă observăm că a doua clauză o absoarbe pe prima, și ajungem tot la $\neg p \vee \neg q$.

Exercițiu: Convertiți în CNF formula $\neg((p \vee \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$.

Eliminăm implicațiile:	$(\neg(p \vee \neg q) \vee r) \vee (p \wedge r)$
De Morgan:	$(\neg p \wedge q) \vee r \vee (p \wedge r)$
Absorbție:	$(\neg p \wedge q) \vee r$
Distributivitate:	$(\neg p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Exercițiu: Convertiți în CNF formula $\neg(((p \vee \neg q) \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r))$. E realizabilă ?

Eliminăm implicațiile:	$\neg(\neg(\neg(p \vee \neg q) \vee r) \vee (p \wedge r))$
De Morgan (din exterior):	$(\neg(p \vee \neg q) \vee r) \wedge \neg(p \wedge r)$
De Morgan:	$((\neg p \wedge q) \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$
Distributivitate:	$(\neg p \vee r) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$

Formula e în formă normală conjunctivă, dar mai putem simplifica:

Comutativitate (reordonare):	$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$
Distributivitate (factor comun):	$\neg p \wedge (r \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$
Simplificare $(r \vee \neg r = \mathsf{T})$:	$\neg p \wedge (q \vee r)$

Formula e realizabilă dacă p e fals, și fie q fie r sunt adevărate.

Exercițiu: Formalizați: A: Nimeni n-a trecut toate examenele trecute de vreun altul.
B: Nimeni n-a trecut toate examenele. C: Oricine a fost măcar la un examen. A și B implică C ?

Folosim predicatele $\mathit{trecut}(x, e)$ dacă x a trecut examenul e, și $\mathit{fost}(x, e)$ dacă x a fost la examenul e. Incluzând în interpretarea predicatelor că x e o persoană și e un examen, nu mai sunt necesare predicate de genul $\mathit{om}(x)$ sau $\mathit{examen}(e)$.
A spune că nu există vreo persoană (s-o numim x) pentru care să existe o altă persoană (s-o numim y) astfel încât x să fie trecut toate examenele trecute de y.

A: $\neg\exists x\, \exists y\, .\, y \neq x \wedge \forall e\, .\, \mathit{trecut}(y,e) \to \mathit{trecut}(x,e)$
B: $\neg\exists x\, \forall e\, \mathit{trecut}(x,e)$
C: $\forall x\, \exists e\, \mathit{fost}(x,e)$
Pentru a raționa corect despre problemă trebuie să formalizăm și legătura între predicatele *trecut* și *fost*, implicită în limbajul natural: dacă cineva a trecut un examen, înseamnă că a fost la acel examen. Adăugăm deci o axiomă:
Ax: $\forall x\, \forall e\, .\, \mathit{trecut}(x,e) \to \mathit{fost}(x,e)$

A și B (împreună cu axioma Ax) implică C dacă $A \wedge B \wedge Ax \to C$ e validă, deci $\neg(A \wedge B \wedge Ax \to C)$, adică $A \wedge B \wedge Ax \wedge \neg C$, e o contradicție. Altfel spus, negăm concluzia, și împreună cu premisele, încercăm să reducem la absurd.

Transformăm pe rând fiecare formulă în formă clauzală.

A :	$\neg\exists x\, \exists y\, .\, y \neq x \wedge \forall e\, .\, \mathit{trecut}(y,e) \to \mathit{trecut}(x,e)$
	$\forall x\, \forall y\, .\, \neg(y \neq x \wedge \forall e\, .\, (\neg\mathit{trecut}(y,e) \vee \mathit{trecut}(x,e)))$
	$\forall x\, \forall y\, .\, y = x \vee \exists e\, .\, (\mathit{trecut}(y,e) \wedge \neg\mathit{trecut}(x,e))$
skolemizare, e depinde de x și y	$\forall x\, \forall y\, .\, y = x \vee (\mathit{trecut}(y, f(x,y)) \wedge \neg\mathit{trecut}(x, f(x,y)))$
	$\forall x\, \forall y\, .\, (y = x \vee \mathit{trecut}(y, f(x,y))) \wedge (y = x \vee \neg\mathit{trecut}(x, f(x,y)))$
B :	$\neg\exists x\, \forall e\, \mathit{trecut}(x,e)$
	$\forall x\, \exists e\, \neg\mathit{trecut}(x,e)$
skolemizare, e depinde de x	$\forall x\, \neg\mathit{trecut}(x, g(x))$
Ax :	$\forall x\, \forall e\, .\, \mathit{trecut}(x,e) \to \mathit{fost}(x,e)$
	$\forall x\, \forall e\, .\, \neg\mathit{trecut}(x,e) \vee \mathit{fost}(x,e)$
$\neg C$:	$\neg\forall x\, \exists e\, \mathit{fost}(x,e)$
	$\exists x\, \forall e\, \neg\mathit{fost}(x,e)$
skolemizare, constantă b pentru x	$\forall e\, \neg\mathit{fost}(b,e)$

Combinăm clauzele, după ce în prealabil dăm nume unice la toate variabilele cuantificate universal, și eliminăm cuantificatorii:
(1) $y = x \vee \mathit{trecut}(y, f(x,y))$
(2) $y = x \vee \neg\mathit{trecut}(x, f(x,y))$
(3) $\neg\mathit{trecut}(z, g(z))$
(4) $\neg\mathit{trecut}(u,e) \vee \mathit{fost}(u,e)$
(5) $\neg\mathit{fost}(b,d)$

Aplicând metoda rezoluției, rezolvenții posibili sunt: $\mathit{rez}(1,2) = (y = x)$, $\mathit{rez}(4,5) = \neg\mathit{trecut}(b,d)$, iar mai apoi acesta cu (1): $x = b$; sau întâi (1) cu (4) și apoi cu (5), cu același rezultat. Nu se poate însă obține clauza vidă. Deci nu avem contradicție, și afirmația originală nu e validă, A și B nu implică C.

Putem dealtfel găsi ușor un model: un univers cu două valori, un examen m și o persoană b care nu a fost la examenul m (C e fals) și nici nu l-a trecut (B e adevărat). Cum există doar o persoană, A e trivial adevărată, neexistând vreun "altul" (deci nici vreunul cu proprietatea dorită).

Lucrurile se schimbă la o ușoară reformulare (ceea ce ne arată că e important să ne exprimăm precis):
A': Pentru orice persoană există o persoană care nu a trecut toate examenele trecute de prima.
A': $\forall x\, \exists y\, \neg\forall e\, .\, \mathit{trecut}(x,e) \to \mathit{trecut}(y,e)$ sau $\forall x\, \exists y\, \exists e\, .\, \mathit{trecut}(x,e) \wedge \neg\mathit{trecut}(y,e)$
Nu mai apare "altul" care să necesite folosirea (ne)egalității. Implicit, y trebuie să fie diferit de x, altfel nu am putea avea $\mathit{trecut}(x,e) \wedge \neg\mathit{trecut}(y,e)$.
Deși dată fiind o persoană x A' impune constrângeri doar pentru o altă persoană și nu pentru toate, arătăm că A' (chiar singură) implică C. Aducem pe A' la formă clauzală, atât y cât și e depind de x:
A': $\forall x\, \mathit{trecut}(x, c(x)) \wedge \neg\mathit{trecut}(h(x), c(x)))$
Arătăm că A implică C': oricine a trecut cel puțin un examen, $\forall x\, \exists e\, \mathit{trecut}(x,e)$, cu negația:
$\neg C'$: $\exists x\, \forall e\, \neg\mathit{trecut}(x,e)$ iar după skolemizare: $\forall e\, \neg\mathit{trecut}(b,e)$
$\neg C'$ și prima clauză din A' au ca rezolvent clauza vidă, deoarece putem unifica x cu b și e cu $c(b)$. Am demonstrat prin reducere la absurd $A' \to C'$. Se vede și direct că $\exists e\, \mathit{trecut}(x,e) \wedge \neg\mathit{trecut}(y,e)$ implică primul termen, $\exists e\, \mathit{trecut}(x,e)$. De aici, axioma Ax ne garantează și $\mathit{fost}(x,e)$, și deci $A' \to C$.