

# Logică și structuri discrete

## Funcții

Marius Minea  
marius@cs.upt.ro

<http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/>

22 septembrie 2014

# Logică și structuri discrete, sau ...

Matematici discrete *cu aplicații*  
folosind *programare funcțională*

Bazele informaticii  
noțiunile de bază din știința calculatoarelor  
unde și cum se *aplică*, mai ales în *limbajele de programare*  
⇒ cum să *programăm mai bine*

# Ce învățăm la acest curs ?

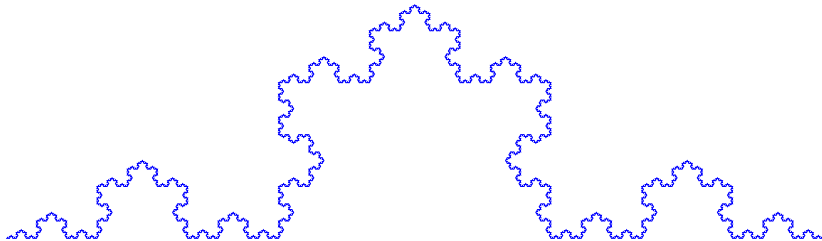
*funcții*: modulul de bază pentru *calcule*

*relații*: apar în grafuri, rețele (sociale), calcul paralel, ...

*liste, mulțimi*: prelucrarea de *colecții* de obiecte

## Ce învățăm la acest curs ?

*recursivitate*: cum să definim *simplu* prelucrări *complexe*  
și să rezolvăm probleme prin subprobleme mai mici



Fractalul lui Koch

# Ce învățăm la acest curs ?

## *Logică matematică*

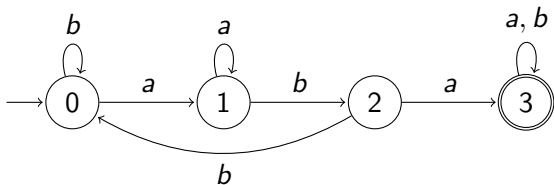
cum exprimăm *precis* afirmații  
pentru definiții riguroase, specificații în software, ...

cum *demonstrăm* afirmații  
pentru a arăta că un algoritm e corect

cum *prelucrăm* formule logice  
pentru a găsi soluții la probleme (ex. programare logică)

## Ce învățăm la acest curs ?

*automate*: sisteme cu logică de control simplă



*expresii regulate*: prelucrări simple de text  $(a|b)^*aba(a|b)^*$

*gramatici*: sintaxa limbajelor de programare

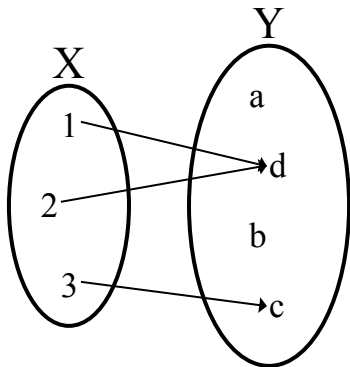
$IfStmt ::= if ( Expr ) Stmt else Stmt$

*arbori*: prelucrări de expresii numerice

*grafuri*: vizualizarea relațiilor

# Funcții

Fiind date mulțimile  $A$  și  $B$ , o *funcție*  $f : A \rightarrow B$  e o asocierie care face să corespundă *fiecărui* element din  $A$  *un singur* element din  $B$ .



## Funcții: componentele definiției

Definiția funcției are deci *trei* componente:

1. *domeniul de definiție* ( $A$ )
2. *domeniul de valori* ( $B$ )
3. asocierea/corespondența propriu-zisă (legea, regula)

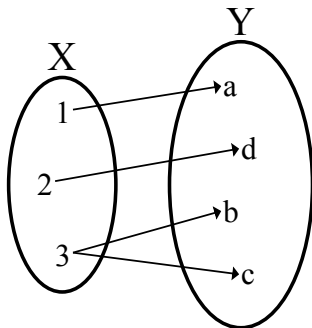
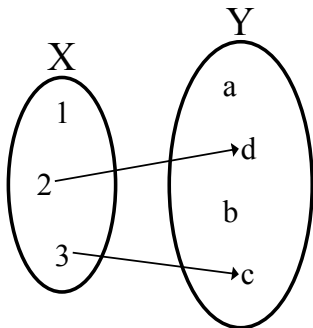
$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x + 1$  și  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 1$   
sunt funcții distincte!

În limbajele de programare, domeniul de definiție și de valori corespund *tipurilor*.

Putem avea funcții care lucrează cu *mai multe* tipuri (*polimorfism*).



## Exemple care NU sunt funcții

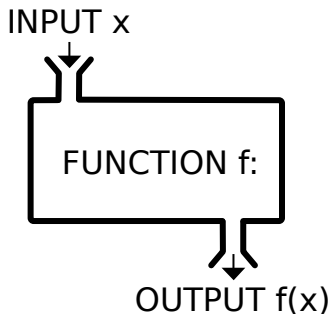


nu asociază o valoare fiecărui element

asociază *mai multe* valori unui element

## Funcții: aspectul computațional

În limbajele de programare, o funcție exprimă un *calcul*:  
primește o valoare (argumentul) și produce ca rezultat altă valoare



## Funcții în limbajele de programare

În limbajele de programare, *funcția* (procedura, metoda) e noțiunea de bază prin care descriem o prelucrare (un calcul).

Aceasta se vede cel mai clar în *limbajele de programare funcționale*:

funcțiile pot fi manipulate la fel de simplu ca și alte valori uzuale (întregi, reali, etc.)

prelucrări complexe se scriu prin compunere de funcții simple (împărțind programul în funcții controlăm complexitatea)

## Programare funcțională în ML

ML: dezvoltat (Robin Milner, Univ. Edinburgh, anii '70) împreună cu un sistem de demonstrare de teoreme (logică matematică)

ilustrează bine conceptele de matematici discrete (liste, mulțimi)

*concis* (în câteva linii de cod se pot face multe)

*fundamentat riguros* ⇒ evită anumite erori (ex. de *tip*)

conceptele din programarea funcțională au influențat alte limbaje

E important să învățăm *concepte*, nu doar limbaje!

*"A language that doesn't affect the way you think about programming, is not worth knowing."*

*Alan Perlis*

Caml: un dialect de ML, cu interpretorul și compilatorul OCaml

<http://caml.inria.fr>

# Funcții în OCaml

`fun x -> x + 1` o *expresie* reprezentând o funcție (fără nume)

`let f = fun x -> x + 1`

`let` *leagă identificatorul* (numele) `f` de expresia dată  
se scrie mai scurt:

`let f x = x + 1`

Interpretorul OCaml răspunde: `val f : int -> int = <fun>`

⇒ matematic:  $f$  e o funcție de la întregi la întregi

⇒ în program: `f` e o funcție cu argument de *tip* întreg (`int`)  
și rezultat de *tip* întreg (domeniul și codomeniul devin *tipuri*)

În programare, un *tip* de date e o mulțime de valori,  
împreună cu niște operații definite pe astfel de valori.

În ML, tipurile pot fi deduse *automat* (*inferență de tip*):  
pentru că la `x` se aplică `+`, compilatorul deduce că `x` e întreg

# Lambda-calcul: originea limbajelor funcționale

*lambda-calcul*: cel mai simplu limbaj de programare (Church 1932)

Universal: poate exprima orice funcție calculabilă  
(orice poate fi calculat printr-un program)

O expresie în  $\lambda$ -calcul e:

- o *variabilă*  $x$
- o *funcție*  $\lambda x . e$  funcție de variabilă  $x$  cu expresia  $e$   
în ML: `fun x -> e`
- o *evaluare* de funcție  $e_1 e_2$  funcția  $e_1$  aplicată argumentului  $e_2$   
la fel în ML: `(fun x -> x+1) 3`  
asociativă la stânga:  $f x y = (f x) y$

lambda-calculul e fundamental în studiul limbajelor de programare

# Funcția în matematică și programare

O funcție matematică, apelată repetat (cu *același* argument), dă *același* rezultat.

E adevărat și în programarea funcțională *pură*.  
vom programa cât mai mult în acest fel  
e mai ușor de raționat despre programele scrise

În programarea imperativă nu e întotdeauna așa  
(atribuiri la variabile)

## Cum putem defini o funcție?

printr-o singură formulă (expresie/regulă)  
pe cazuri (mai multe variante/expresii, depinzând de o condiție)  
individual (explicit) pentru fiecare valoare

## Funcții definite pe cazuri

$$\text{Fie } \text{abs} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \text{abs}(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Valoarea funcției nu e dată de o singură expresie, ci de una din două expresii diferite ( $x$  sau  $-x$ ), depinzând de o condiție ( $x \geq 0$ ).

```
let abs x = if x >= 0 then x else - x
```

`if expr1 then expr2 else expr3` e o *expresie condițională*

Dacă *evaluarea* lui `expr1` dă valoarea *adevărat* (*true*)

valoarea expresiei e valoarea lui `expr2`, altfel e valoarea lui `expr3`.

`expr2` și `expr3` trebuie să aibe *același tip* (ambele întregi, reale, ...)

În alte limbaje (C, Java, etc.) `if` și ramurile lui sunt *instrucțiuni*.

În ML, `if` e o *expresie*. În ML nu avem instrucțiuni, ci doar *expresii* (care sunt evaluate), și *definiții* de valori sau funcții (cu `let`).

(Vom lucra ulterior și cu definiții de tipuri și de module.)



## Funcții definite prin tipare

Exemplu: conversie note americane

```
let us_to_GPA = function
  | 'A' -> 4
  | 'B' -> 3
  | 'C' -> 2
  | 'D' -> 1
  | _ -> 0
```

Cuvântul cheie `function` introduce o funcție definită folosind *potriviri de tipare* (engl. pattern matching).

Fiecare variantă are forma *tipar* -> *rezultat*.

În cazul de mai sus, fiecare tipar e o valoare individuală (caracter).

Tiparul `_` acoperă orice valoare (care nu a fost deja acoperită)

Limbajul ne *obligă* să acoperim toate variantele (o funcție trebuie să fie definită complet)  $\Rightarrow$  reduce numărul de erori.

## Funcții injective

Def.: O funcție  $f : A \rightarrow B$  e *injectivă* dacă asociază valori diferite la argumente (valori) diferite.

Riguros: pentru orice  $x_1, x_2 \in A$ ,  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

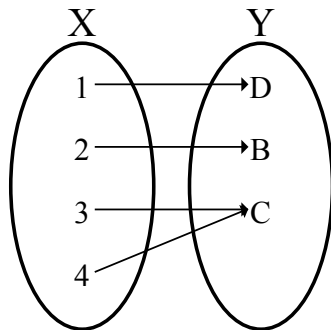
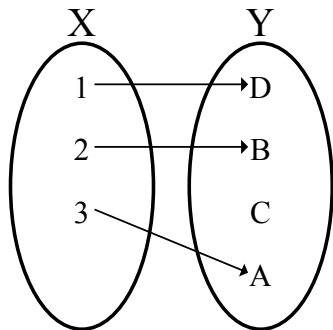
Echivalent:  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

dacă valorile sunt egale, atunci argumentele sunt egale  
(*contrapozitiva* afirmației de mai sus)

În logică, faptul că o afirmație e echivalentă cu contrapozitiva ei ne permite *demonstrație prin reducere la absurd*.

Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  sunt finite, și  $f$  e injectivă, atunci  $|A| \leq |B|$ .

## Exemple: funcție injectivă și neinjectivă



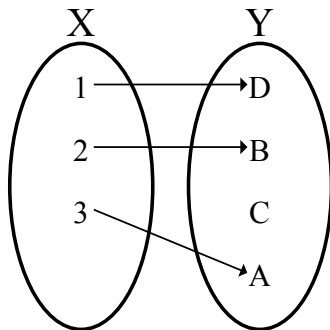
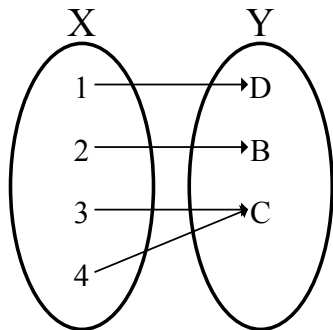
Imagine: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Injection.svg>

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Surjection.svg>

## Funcții surjective

O funcție  $f : A \rightarrow B$  e *surjectivă* dacă pentru fiecare  $y \in B$  există un  $x \in A$  cu  $f(x) = y$ .

Exemple: funcție surjectivă și nesurjectivă



Imagine: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Surjection.svg>

Imagine: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Injection.svg>

## Funcții surjective: discuție

Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi finite, și  $f : A \rightarrow B$  e surjectivă, atunci  $|A| \geq |B|$ .

Putem transforma o funcție ne-surjectivă într-una surjectivă prin restrângerea domeniului de valori:

$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x^2$  nu e surjectivă,  
dar  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  (restrânsă la valori nenegative) este.

În programare, e util să definim funcția cu tipul rezultatului cât mai precis (dacă e posibil, surjectivă).

Astfel, când raționăm despre program, știm deja din tipul funcției ce valori poate returna, fără a trebui să-i analizăm codul.

Exercițiu: cum putem defini funcția semn ?

## Câte funcții există de la $A$ la $B$ ?

Dacă  $A$  și  $B$  sunt mulțimi finite există  $|B|^{|A|}$  funcții de la  $A$  la  $B$ .

Notăție:  $|A|$  = cardinalul lui  $A$  (numărul de elemente)

Demonstrație: prin *inducție matematică* după  $|A|$

### *Principiul inducției matematice*

Dacă o propoziție  $P(n)$  depinde de un număr natural  $n$ , și

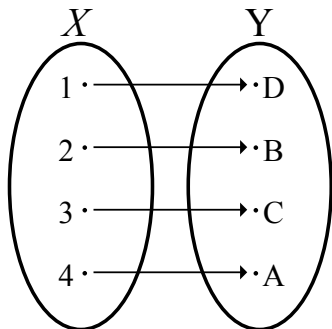
1) (*cazul de bază*)  $P(0)$  e adevărată

2) (*pasul inductiv*) pentru orice  $n \geq 0$ ,  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

atunci  $P(n)$  e adevărată pentru orice  $n$ .

## Funcții bijective

O funcție care e injectivă și surjectivă se numește *bijectivă*.



Dacă mulțimile  $A$  și  $B$  sunt finite, și  $f$  e bijectivă, atunci  $|A| = |B|$ .

## Imagine și preimage

Fie  $f : A \rightarrow B$ .

Dacă  $S \subseteq A$ , mulțimea elementelor  $f(x)$  cu  $x \in S$  se numește *imagea* lui  $S$  prin  $f$ , notată  $f(S)$ .

Dacă  $T \subseteq B$ , mulțimea elementelor  $x$  cu  $f(x) \in T$  se numește *preimagea* lui  $T$  prin  $f$ , notată  $f^{-1}(T)$ .

În general,  $f^{-1}(f(S)) \supseteq S$  (aplicând întâi funcția, și apoi revenind la preimage, se pierde precizie).



# Funcții inversabile

O funcție  $f : A \rightarrow B$  e inversabilă dacă pentru orice  $y \in B$  există o *unică* valoare  $x \in A$  cu  $f(x) = y$ .

O funcție e inversabilă dacă și numai dacă e bijectivă:

pentru orice  $y \in B$  *există*  $x \in A$  cu  $f(x) = y \Rightarrow f$  e surjectivă  
 $x$  cu  $f(x) = y$  e *unic*  $\Rightarrow f$  e injectivă.

Inversa lui  $f : A \rightarrow B$  se notează  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .

## Nu orice inversă e ușor calculabilă

Pentru o funcție inversabilă, inversa nu e neapărat *ușor calculabilă*.

Fie mulțimea  $\mathbb{Z}_p^*$  a resturilor nenule modulo  $p$ , cu  $p$  prim.  
Ea formează un *grup multiplicativ* cu operația de înmulțire mod  $p$ .

Teorema lui Fermat:  $a^{p-1} = 1 \pmod p$  pentru orice  $a \in \mathbb{Z}_p^*$ .

Se mai știe că dacă  $p$  e prim, grupul  $\mathbb{Z}_p^*$  are cel puțin un *generator*, adică un element  $g$  astfel încât șirul  $g, g^2, g^3, \dots, g^{p-1}$  parcurge toată mulțimea  $\mathbb{Z}_p^*$ .

De exemplu, 3 e generator în  $\mathbb{Z}_7^*$ : șirul  $3^k \pmod 7$  e 3, 2, 6, 4, 5, 1

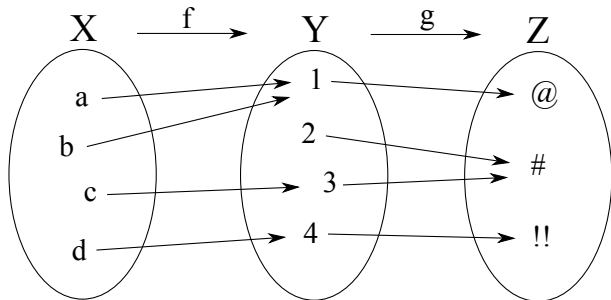
Înseamnă că funcția  $f : \mathbb{Z}_p^* \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ ,  $f(x) = g^x \pmod p$  e o *bijecție* (și inversabilă).

Nu se cunoaște însă un mod eficient de a o inversa când  $p$  e mare (problema logaritmului discret)  $\Rightarrow$  e folosită în criptografie.

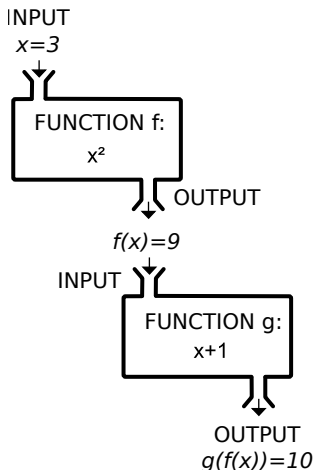
## Compunerea funcțiilor

Fie funcțiile  $f : A \rightarrow B$  și  $g : B \rightarrow C$ . Compunerea lor este funcția  $g \circ f : A \rightarrow C$ ,  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

Compunerea ne permite să construim funcții mai complicate din funcții mai simple.



# Compunerea funcțiilor - ilustrare computațională



Rezultatul funcției  $f$  devine argument pentru funcția  $g$

## Proprietăți ale compunerii funcțiilor

Compunerea a două funcții e asociativă:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Compunerea a două funcții nu e neapărat comutativă

$$f \circ g \neq g \circ f \quad (\text{în general})$$

### Compunerea și inversa

Pentru orice funcție inversabilă  $f : A \rightarrow B$  avem

$$f \circ f^{-1} = id_B \quad \text{și} \quad f^{-1} \circ f = id_A$$

unde  $id_A : A \rightarrow A$ ,  $id_A(x) = x$  e *funcția identitate*

## Funcții cu mai multe argumente în ML

Când scriem  $f(x, y) = \dots$  în ML,  $f$  nu are două argumente, ci *un* argument, *perechea*  $(x, y)$ .

Dacă  $x \in A$  și  $y \in B$ ,  $f$  e definită pe *produsul cartezian*  $A \times B$ :

$f : A \times B \rightarrow C$

`let f1 (x, y) = 2*x + y - 1` și interpretorul răspunde

`val f1 : int * int -> int = <fun>`

(tipul lui `f1` e funcție de o pereche de întregi cu valoare întreagă)

Alternativ, putem defini

`let f2 x y = 2*x + y - 1` și interpretorul răspunde

`val f2 : int -> int -> int = <fun>`

`f2` e de fapt o funcție cu *un singur* argument  $x$ , care returnează o *funcție*. Aceasta ia argumentul  $y$  și returnează rezultatul numeric.

În programarea funcțională se preferă scrierea în acest mod

(numit *currying*, după Haskell Curry)

permite *evaluarea parțială* a funcției, având primul argument.

## Funcții cu mai multe argumente (cont.)

Mulțimea funcțiilor  $f : A \rightarrow B$  se notează uneori  $B^A$

Notăția ne amintește că numărul acestor funcții e  $|B|^{|A|}$  (dacă  $A, B$  sunt finite).

Numărul funcțiilor  $f : A \times B \rightarrow C$  este  $|C|^{|A \times B|} = |C|^{|A| \cdot |B|}$ .

Rescriind prin *currying* ( $f$  a b în loc de  $f(a, b)$  în ML) obținem mulțimea funcțiilor  $f : A \rightarrow C^B$  (funcții care cu un argument din  $A$  produc o funcție de la  $B$  la  $C$ , adică din  $C^B$ ).

Numărul acestora e tot  $(|C|^{|B|})^{|A|} = |C|^{|A| \cdot |B|}$ .

Aceasta ne indică faptul că există o corespondență 1:1 (bijecție) între scrierea cu un argument pereche și scrierea cu 2 argumente.

## Operatorii sunt funcții

Operatorii (ex. matematici, +, \*, etc.) sunt tot niște funcții: ei calculează un rezultat din valorile operanzilor (argumentelor).

Diferența e doar de *sintaxă*: scriem operatorii *între* operanzi (*infix*), iar numele funcției *înaintea* argumentelor (*prefix*).

Putem scrie în ML operatorii și prefix:

(+) 3 4                      paranteza deosebește de operatorul + unar

let add1 = (+) 1

add1 3                      la fel ca: (+) 1 3

add1 e funcția care adaugă 1 la argument, deci fun x -> x + 1



# Rezumat

Recapitulare: funcții injective, surjective, bijective, inversabile.

Prin funcții exprimăm calcule în programare.

Operatorii sunt cazuri particulare de funcții.

Domeniile de definiție și valori corespund *tipurilor* din programare.

Când scriem/compunem funcții, tipurile trebuie să se potrivească.

În limbajele funcționale, funcțiile pot fi manipulate ca orice valori.

Funcțiile pot fi argumente și rezultate de funcții.

Funcțiile de mai multe argumente (sau de tuple) pot fi rescrise ca funcții de un singur argument care returnează funcții.