Logică și structuri discrete

Logica predicatelor

Marius Minea
marius@cs.upt.ro

http://www.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/

10 noiembrie 2014

Logică: recapitulare

Folosim logica pentru a *formaliza* raționamente
= a le exprima *riguros*

Logica ne permite să facem demonstrații (deducții)
din *axiome* (totdeauna adevărate)
și *ipoteze* (considerate adevărate în problema dată)
folosind *reguli de inferență* (de deducție)

$$\frac{p \qquad p \to q}{q} \qquad \textit{modus ponens}$$

Modus ponens e suficient pentru a formaliza logica propozițională
dar se pot defini și alte reguli de deducție valide.
Astfel putem simplifica demonstrațiile.

Logica propozițională e insuficientă

Un exemplu clasic:
(1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Seamănă cu *modus ponens*
dar, premisa din (1) ("toți oamenii")
nu e la fel cu (2) (Socrate, un anumit om)

În logica clasică: *silogisme* (anumite tipare de reguli de inferență)
Aristotel, stoici

în logica modernă: *logica predicatelor* (logica de ordinul I)
Gottlob Frege, Charles Peirce (sec. 19)

Silogisme categorice

= reguli de inferență compuse din 3 părți:

(1) premisa *majoră*: Toți oamenii sunt muritori
(2) premisa *minoră*: Toți grecii sunt oameni
(3) concluzia: Toți grecii sunt muritori

Fiecare e o *propoziție categorică*, despre două categorii A și B.

Fiecare premisă are o categorie în comun cu concluzia:
termenul *major* (muritori), respectiv termenul *minor* (grecii);
a treia categorie e termenul *mediu* (de legătură): oameni.

4 *tipuri* de propoziții categorice:

cod	cuantificator	relație	tip
A	toți	sunt	afirmativ universal
E	niciun	nu e	negativ universal
I	unii	sunt	afirmativ particular
O	unii	nu sunt	negativ particular

A: Toți oamenii sunt muritori. E: Niciun om nu e perfect.
I: Unii oameni sunt înalți. O: Unii oameni nu sunt cinstiți.

Silogisme și exemple

Notăm S *subiectul* concluziei, P *predicatul* ei, M termenul mediu.
Premisa majoră leagă M și P, iar cea minoră pe M și S.

Rolurile subiect-predicat în premise determină 4 *figuri*

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4
Premisa majoră	M-P	P-M	M-P	P-M
Premisa minoră	S-M	S-M	M-S	M-S

Tipuri de silogisme: $\left\{ \begin{array}{l} \text{3 litere (AEIO) pentru cele 3 propoziții} \\ \text{o cifră (1-4) pentru figură} \end{array} \right.$

$\Rightarrow 4^4 = 256$ combinații, dar numai 6 valide pentru fiecare figură.

Exemple: AAA-1: cel anterior (grecii ... oameni ... muritori)

EAE-1: Niciun examen nu e ușor.
Parțialele sunt examene.
Rezultă: parțialele nu sunt ușoare.

???-?: Toate notițele utile sunt corecte.
Unele notițe nu sunt corecte.
Unele notițe nu sunt utile.

Spre logica predicatelor

Revenim la exemplul:
(1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Am putea reformula (1):
Dacă X e om, atunci X e muritor.
sau mai precis
Pentru orice X, dacă X e om, atunci X e muritor

⇒ avem nevoie de
variabile (X) care să ia valori într-un anumit univers
proprietăți (om, muritor) sau *relații* între variabile
funcții, pentru atributele unei variabile (ex. culoare, nota)
cuantificatori universal (toți), existențial (unii)

Exemple: Ce vrem să exprimăm

Proprietăți mai complexe decât în logica propozițională:

$member(x, A) \rightarrow member(x, union(A, B))$ mulțimi

$leq(x, y) \rightarrow leq(f(x), f(y))$ funcție monotonă

$$apel(nrX, nrY) \wedge eq(rețea(nrX), rețea(nrY)) \wedge prepay(nrX)$$
$$\rightarrow eq(cost(nrX, nrY), 0.11)$$

$$apel(nrX, nrY) \wedge fix(nrX) \wedge fix(nrY) \rightarrow eq(cost(nrX, nrY), 0.04)$$

Avem:

variabile (x, y, nrX, nrY)
funcții (*union*, f, *rețea*, *cost*)
predicate (*member*, *leq*, *apel*, *prepay*, *fix*)
(egalitatea e un predicat considerată uneori separat)

Un *predicat* = o afirmație relativ la una sau mai multe variabile, care, dând valori variabilelor, poate lua valoarea adevărat sau fals.

Logica predicatelor (logica de ordinul I)

Precizăm întâi *simbolurile* limbajului:

- parantezele ( )
- conectorii $\neg$ și $\rightarrow$
- cuantificatorul $\forall$ (universal)
- o mulțime de identificatori $v_0, v_1, \cdots$ pentru *variabile*
- pentru orice $n \geq 1$ o mulțime de simboluri de *funcții* n-are
- o mulțime (posibil vidă) de simboluri pentru *constante*
  constantele pot fi privite și ca funcții de 0 argumente
- pentru orice $n \geq 0$ o mulțime de simboluri de *predicate* n-are
  propozițiile pot fi privite ca predicate de 0 argumente

Logica de ordinul I cu egalitate:
conține și $=$ ca simbol special pe lângă cele de mai sus.

Sintaxa: termeni și formule

Ca deobicei, noțiunile se definesc *structural recursiv*

Termenii

variabilă v sau constantă c

$f(t_1, \cdots, t_n)$ cu f funcție n-ară și $t_1, \cdots, t_n$ *termeni*

Formule (well-formed formulas, formule bine formate):

$P(t_1, \cdots, t_n)$	cu P predicat n-ar; $t_1, \cdots, t_n$ termeni
$\neg\alpha$	unde α este o formulă
$\alpha \to \beta$	unde α, β sunt formule
$\forall v\, \alpha$	cu v variabilă, α formulă: *cuantificare universală*
$t_1 = t_2$	cu t_1, t_2 termeni (în limbaje cu egalitate)

Față de logica propozițională, în loc de propoziții avem *predicate* (peste *termeni*).

Logica se numește *de ordinul I*, deoarece *cuantificatorii logici* se pot aplica doar variabilelor.

În logici *de ordin superior*, se poate cuantifica și peste predicate.

Reprezentare în ML

Termenii și formulele sunt definite structural recursiv
se pot traduce direct în tipuri recursive

```
type term = V of string
          | F of string * term list

type predform = Pr of string * term list
              | Neg of predform
              | And of predform * predform
              | Or of predform * predform
              | Forall of string * predform
```

Am ales să reprezentăm constantele ca funcții cu zero argumente.

Atât termenii cât și predicatele au argumente: listă de termeni.

Exemplu: $\forall x \neg \forall y\, P(x, f(y))$

```
Forall("x", Neg(Forall("y", Pr("P",[V "x"; F("f", [V "y"])])))))
```

Despre cuantificatori

Cuantificatorul existențial $\exists$

Notăm: $\exists x \varphi \stackrel{def}{=} \neg \forall x (\neg \varphi)$

Cei doi cuantificatori sunt *duali*. Putem scrie și $\forall x \varphi = \neg \exists x (\neg \varphi)$

Cuantificatorii au precedență mai mare decât conectorii $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$ ...

Un punct indică aplicarea cuantificării la tot restul formulei,
până la sfârșit sau paranteză închisă (evită parantezele inutile).

$(\exists x \,.\, P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$ înseamnă $(\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))) \wedge R(x)$

În formula $\forall v \varphi$ (sau $\exists v \varphi$) variabila v se numește *legată*
Variabilele care nu sunt legate se numesc *libere*

O variabilă poate fi liberă și legată în aceeași formulă.
Mai sus, x e legată în primul conjunct $P(x) \rightarrow Q(x)$
și e liberă în $R(x)$ (e în afara cuantificatorului)

Variabile libere și legate

Înțelesul unei formule *nu depinde* de variabilele legate
 înțelesul lor e "legat" de cuantificator ("pentru orice", "există")
 pot fi redenumite, fără a schimba înțelesul formulei

O formulă fără variabile libere are înțeles de sine stătător.

Rol similar: parametrii formali la funcții în limbaje de programare
 putem să îi redenumim fără a schimba efectul funcției
 `fun x -> x + 3` și `fun y -> y + 3` sunt aceeași funcție

Interpretarea unei formule *depinde* de variabilele sale libere
 (ce valoare primesc; discutăm la semantica formulelor)

La fel și `fun x -> x + y`
 nu are înțeles de sine stătător (`y` e nedeclarat)
 efectul depinde definiția lui `y`

Formalizarea limbajului natural

1. Fiecare investitor a cumpărat acțiuni sau obligațiuni.
2. Dacă indicele Dow Jones scade, toate acțiunile mai puțin aurul scad.
3. Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.
4. Orice investitor care a cumpărat ceva care scade nu e bucuros.
5. Dacă indicele Dow Jones scade și trezoreria crește dobânda, toți investitorii bucuroși au cumpărat ceva acțiuni de aur.

Exemplu: `http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`

Verbele devin *predicate* (ca în limbajul natural):
cumpără, scade, crește, ...

Subiectul și *complementele* (in)directe: *argumentele* predicatului
investitor, ceea ce cumpără (acțiuni, obligațiuni)

Atributele (proprietăți) sunt *predicate* despre entități (*argumente*)
bucuros (investitor), de aur (acțiune)

Categoriile devin predicate, cu argument entitatea din categorie
e acțiune, e obligațiune (ce se cumpără)

O *frază* e un predicat (0 argumente) dacă verbul apare doar în ea
trezoreria crește dobânda   ("crește" apare doar aici)

Exemplu de formalizare

1. Fiecare investitor a cumpărat acțiuni sau obligațiuni.

Două entități: investitorul, ce cumpără (cu două categorii)
Introducem un predicat *inv(X)* (X e investitor)

$$inv(X) \rightarrow cumpără(X, C) \wedge (acțiune(C) \vee oblig(C))$$

Vrem formule *fără variabile libere* (independente de context)
X e cuantificat universal (*fiecare* investitor)
C e cuantificat existențial (investitorul cumpără *ceva*)

$$\forall X \,.\, inv(X) \rightarrow \exists\, C \,.\, cumpără(X, C) \wedge (acțiune(C) \vee oblig(C))$$

2. Dacă indicele Dow Jones scade, toate acțiunile mai puțin aurul scad.

$$scade(dj) \rightarrow \forall\, X \,.\, acțiune(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X)$$

Indicele Dow Jones e o noțiune unică $\Rightarrow$ folosim o *constantă dj*

Exemplu de formalizare (cont.)

3. Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.

$$crestedob \rightarrow \forall X \,.\, oblig(X) \rightarrow scade(X)$$

Dobânda e unicul lucru care crește $\Rightarrow$ predicat fără parametri
Alternativ: o constantă *dobânda*

4. Orice investitor care a cumpărat ceva care scade nu e bucuros.
$\forall X \,.\, inv(X) \rightarrow (\exists\, C \,.\, cump\breve{a}r\breve{a}(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucuros(X)$
$\rightarrow$ asociază la dreapta, $p \rightarrow q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r) = p \wedge q \rightarrow r$, echivalent:
$\forall X \,.\, inv(X) \wedge (\exists\, C \,.\, cump\breve{a}r\breve{a}(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucuros(X)$

5. Dacă indicele Dow Jones scade și trezoreria crește dobânda, toți investitorii bucuroși au cumpărat ceva acțiuni de aur.
$scade(dj) \wedge crestedob \rightarrow$

$$\forall X \,.\, inv(X) \wedge bucuros(X) \rightarrow \exists\, C \,.\, cump\breve{a}r\breve{a}(X, C) \wedge ac\c{t}iune(C) \wedge aur(C)$$

Formalizarea cuantificatorilor

cuantificatorul universal ("toți") cuantifică o implicație:

Toți studenții sunt tineri
Studenți $\subseteq$ *Tineri*

$$\forall x(student(x) \rightarrow t\hat{a}n\breve{a}r(x))$$

cuantificatorul existențial ("unii", "există") cuantifică o conjuncție

Unii tineri sunt studenți
Studenți $\cap$ *Tineri* $\neq \emptyset$

$$\exists x(t\hat{a}n\breve{a}r(x) \wedge student(x))$$

Cuantificatorul *universal* e *distributiv față de conjuncție*:

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$$

dar cuantificatorul *existențial* NU ~~e distributiv~~ față de conjuncție:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x) \not\leftrightarrow (\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x))$$

(avem implicație, dar nu și invers, poate să nu fie același x !)

Dual, $\exists$ e distributiv față de disjuncție, $\forall$ nu e. Avem doar:

$$\exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \rightarrow \exists x\,.\, P(x) \vee Q(x)$$

Transformarea în formă clauzală (normală conjunctivă)

Similar cu logica de ordinul I, cu pași în plus pentru cuantificatori

Fie $\forall x[\neg P(x) \to \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(1) Eliminăm toți conectorii în afară de $\wedge$, $\vee$, $\neg$:
$\forall x[\neg\neg P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg(E(f(x),y) \vee E(x,y)))] \wedge \neg\forall x P(x)$

(2) Ducem negațiile înăuntru, până la predicate:
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists x \neg P(x)$

(3) Redenumim variabilele cuantificate, cu nume unice în formulă
$\forall x[P(x) \vee \exists y(D(x,y) \wedge \neg E(f(x),y) \wedge \neg E(x,y))] \wedge \exists z \neg P(z)$

(4) Eliminăm cuantificatorii existențiali (*skolemizare*)
Pentru $\exists y$ în *interiorul* lui $\forall x_1 \ldots \forall x_n$, introducem o *funcție* Skolem
$y = g(x_1, \ldots, x_n)$: valoarea lui y depinde de $x_1, \ldots x_n$ aici $g(x)$
Pentru $\exists y$ în *exterior*, se alege o nouă *constantă* Skolem aici a
$\forall x[P(x) \vee (D(x,g(x)) \wedge \neg E(f(x),g(x)) \wedge \neg E(x,g(x)))] \wedge \neg P(a)$

Forma clauzală (cont.)

(5) Aducem la *forma normală prenex*: cuantificatorii $\forall$ în față
$\forall x([P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a))$

(6) Eliminăm prefixul cu cuantificatorii universali (devin impliciți)
$[P(x) \vee (D(x, g(x)) \wedge \neg E(f(x), g(x)) \wedge \neg E(x, g(x)))] \wedge \neg P(a)$

(7) Convertim la forma normală conjunctivă
$(P(x) \vee D(x, g(x))) \wedge (P(x) \vee \neg E(f(x), g(x)))$
$\wedge (P(x) \vee \neg E(x, g(x))) \wedge \neg P(a)$

(8) Eliminăm $\wedge$ și scriem disjuncții ca și clauze separate
$P(x) \vee D(x, g(x))$
$P(x) \vee \neg E(f(x), g(x))$
$P(x) \vee \neg E(x, g(x))$
$\neg P(a)$

Axiomele calculului predicatelor

Definim: variabila x se poate *substitui* cu termenul t în $\forall y \varphi$ dacă:

x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau

y nu apare în t și x se poate substitui cu t în φ

(nu putem substitui variabile legate)

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$

A5: $\forall x \alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$, dacă x poate fi substituit cu t în α

A6: $\alpha \to \forall x \alpha$ dacă x nu apare liber în α

Pentru egalitate, adăugăm și
A7: $x = x$
A8: $x = y \to \alpha = \beta$

unde β se obține din α înlocuind oricâte din aparițiile lui x cu y.

Regula de inferență: tot *modus ponens* (e suficient)

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi A*5)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)
Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

$$\frac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi(x)}$$ *generalizare universală* (*vezi A*6)

unde c e o valoare arbitrară (nu apare în ipoteze)
Dacă φ e valabilă pentru o valoare arbitrară, e valabilă pentru orice x.

$$\frac{\exists x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere existențială*

Dacă există o valoare cu proprietatea φ, o instanțiem (cu un nume nou).

$$\frac{\varphi(c)}{\exists x\ \varphi(x)}$$ *generalizare existențială*

Dacă φ e adevărată pentru o anumită valoare, există o valoare care o face adevărată.

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un înțeles pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I
  (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
- pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f_I : U^n \to U$
- pentru orice simbol de predicat n-ar P, o submulțime $P_I \subseteq U^n$.
  (*interpretăm* fiecare simbol din formulă)

O interpretare *nu* dă valori variabilelor (vezi ulterior: atribuire).

Exemplu:

$\forall x.P(x,x)$ reflexivitate

$\forall x.\forall y.\forall z.P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)$ tranzitivitate

De exemplu: universul U = numere reale; predicatul P: relația $\leq$

$\forall x.\forall y.P(x,y) \to \exists z.P(x,z) \wedge P(z,y)$

găsiți două interpretări în care e adevărat / fals ?

Interpretări, atribuiri, valori de adevăr

Fie I o *interpretare* cu univers U
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile.

O *atribuire* este o funcție $s : V \to U$
(dă fiecarei *variabile libere* o *valoare* din *univers*)
$\Rightarrow$ din atribuirea s se poate obține valoarea pentru orice *termen*
(știm valoarea fiecărei variabile și înțelesul fiecărei funcții)

Interpretarea I dă și înțelesul fiecărui *predicat*
$\Rightarrow$ putem calcula *valoarea de adevăr* a unei formule
$\neg$, $\to$ etc. au înțelesul cunoscut din logica propozițională
trebuie definit înțelesul (semantica) lui $\forall$

Spunem că $\forall x \varphi$ e adevărată în interpretarea I cu atribuirea s dacă φ e adevărată înlocuind x cu *orice* valoare $d \in U$ din univers.

Modele și tautologii

Un *model* pentru o formulă φ e o interpretare în care formula e adevărată *pentru orice atribuire* a variabilelor.
Spunem că φ e *adevărată* în interpretarea (structura) I, și notăm $I \models \varphi$

Obs: Dacă o formulă nu are variabile libere, valoarea ei de adevăr depinde doar de interpretare, nu și de vreo atribuire.

Def: O *tautologie* e o formulă adevărată în *orice* interpretare.

Spre deosebire de logica propozițională, în logica predicatelor, numărul interpretărilor e *infinit*
$\Rightarrow$ nu mai putem construi exhaustiv tabelul de adevăr.

E *esențial* deci să putem *demonstra* o formulă
(pornind de la axiome și regiuli de inferență)

Consistență și completitudine

Ca și în logica propozițională:

- *demonstrația* se face pur sintactic
- determinarea *adevărului*: semantic, considerând *interpretări*

Fie H o mulțime de formule și φ o formulă.
Notăm $I \models H$ dacă I e un model pentru fiecare formulă din H.
Spunem că H implică φ ($H \models \varphi$) dacă pentru orice interpretare I,

$$I \models H \text{ implică } I \models \varphi$$

(adică φ e adevărată în orice interpretare care satisface toate ipotezele din H)

Calculul predicatelor de ordinul I este *consistent* și *complet* (la fel ca și logica propozițională):

$$H \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } H \models \varphi$$

Dar: relația de implicație logică e doar *semidecidabilă*

- dacă o formulă e o tautologie, ea poate fi demonstrată
- dar dacă nu e, încercarea de a o demonstra (sau o refuta) poate să continue la nesfârșit