Model checking cu automate
Relaţii între modele. Raţionament compoziţional

26 octombrie 2004

Relaţia între implementare şi specificare

Am discutat până acum:
implementarea (modelul): automat cu stări finite
specificaţia: formulă în logică temporală (LTL, CTL)

O altă viziune:
– şi specificaţia e un automat
– cu "mai puţine detalii" decât implementarea
– model checking pentru LTL: prin traducerea formulei în automat

Mai general: cum definim relaţia de rafinare între model şi specificaţie?
– incluziunea limbajelor, simulare, bisimulare

Cum se păstrează aceste relaţii de rafinare la compoziţia modulelor ?

Model checking pentru LTL

Ideea de ansamblu:

– verificăm formule de tipul $\mathbf{A}f$ (f = formulă de traiectorie
în care singurele subformule de stare sunt propoziţii atomice)
– $\mathbf{A}f = \neg\mathbf{E}\neg f \Rightarrow$ suficient să considerăm $\mathbf{E}f$.
– construim un *tableau* T pentru formula f = un automat
(structură Kripke) care exprimă *toate* traiectoriile care satisfac f
– se compune modelul M cu tabloul T
– se verifică dacă există o traiectorie în compoziţie
(cu algoritmii de model checking CTL)

Construirea tabloului. Formule elementare

Fie AP_f mulţimea propoziţiilor atomice care apar în f.
$T = (S_T, R_T, L_T)$, cu $L_T : S_T \to 2^{AP_f}$.
Stările tabloului: mulţimi de *formule elementare* extrase din f.

- $el(p) = \{p\}$ pentru $p \in AP_f$
- $el(\neg g) = el(g)$
- $el(g_1 \vee g_2) = el(g_1) \cup el(g_2)$
- $el(\mathbf{X}g) = \{\mathbf{X}g\} \cup el(g)$
- $el(g_1 \mathbf{U} g_2) = \{\mathbf{X}(g_1 \mathbf{U} g_2)\} \cup el(g_1) \cup el(g_2)$

Mulţimea stărilor tabloului: $S_T = \mathcal{P}(el(f))$

Relaţia de satisfacere în tablou

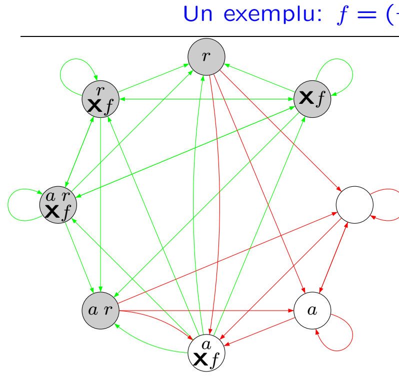
Asociem fiecărei subformule din f o mulţime de stări din T
(intuitiv: mulţimea de stări care satisfac acea formulă)

- $sat(g) = \{s \mid g \in s\}$ pentru $g \in el(f)$
- $sat(\neg g) = \{s \mid s \notin sat(g)\}$
- $sat(g_1 \vee g_2) = sat(g_1) \cup sat(g_2)$
- $sat(g_1 \mathbf{U} g_2) = sat(g_2) \cup (sat(g_1) \cap sat(\mathbf{X}(g_1 \mathbf{U} g_2)))$

Relaţia de tranziţie: consistentă cu semantica lui $\mathbf{X}$
– $\mathbf{X}g \in s \to \forall s' . R(s, s') \to g \in s'$
– $\mathbf{X}g \notin s \to \forall s' . R(s, s') \to g \notin s'$

$$R_T(s, s') = \bigwedge_{\mathbf{X}g \in el(f)} s \in sat(\mathbf{X}g) \Leftrightarrow s' \in sat(g)$$

Un exemplu: $f = (\neg ack)\mathbf{U}recv$



$el(f) = \{a, r, \mathbf{X}f\}$
$sat(f) = \quad =$
$sat(r) \cup (\neg sat(a) \cap sat(\mathbf{X}f))$

$R_T = \longrightarrow \cup \longrightarrow$
$\longrightarrow = sat(\mathbf{X}f) \times sat(f)$
$\longrightarrow = \neg sat(\mathbf{X}f) \times \neg sat(f)$

Calculul produsului

Definim $T \times M = (S_T, R_T, L_T) \times (S_M, R_M, L_M) = (S, R, L) = P$

- $S = \{(s_T, s_M) \mid s_T \in S_T, s_M \in S_M, L_T(s_T) = L_M(s_M) \cap AP_f\}$
- $R((s_T, s_M), (s'_T, s'_M)) = R_T(s_T, s'_T) \wedge R_M(s_M, s'_M)$
- $L((s_T, s_M)) = L_T(s_T)$

(tranziții simultane, doar pentru stările etichetate la fel).
Produsul: restrâns la stările din care există cel puțin o tranziție.

Problemă: T nu garantează proprietățile de *eventualitate*:
R_T asigură $sat(g\mathbf{U}h)$ continuu până la $sat(h)$, dar nu și $\mathbf{F}sat(h)$
$\Rightarrow$ model checking cu *fairness*: $\{sat(g\mathbf{U}h) \rightarrow h \mid g\mathbf{U}h$ apare în $f\}$

Teoremă: $M, s_M \models \mathbf{E}f \Leftrightarrow \exists s_T \in sat(f) \,.\, P, (s_T, s_M) \models_F \mathbf{EG}\,\mathit{True}$
cu condițiile de fairness $\{sat(g\mathbf{U}h) \rightarrow h \mid g\mathbf{U}h$ apare în $f\}$

Incluziunea între limbaje

= language inclusion, trace inclusion
Fie o structură Kripke M cu o mulțime AP de propoziții atomice

Limbajul lui M = mulțimea execuțiilor văzută ca secvență de etichetări
Formal: $\mathcal{L}(M)$ = mulțimea de cuvinte (șiruri) infinte $\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$
astfel încât există o cale $s_0 s_1 s_2 \ldots$ a lui M cu $L(s_i) = \alpha_i$.

Incluziunea între limbaje păstrează exact proprietățile LTL:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{A}f \in LTL \,.\, \mathcal{S} \models \mathbf{A}f \Rightarrow \mathcal{M} \models \mathbf{A}f$$

Relația de simulare

Fie două structuri M și M', cu $AP \supseteq AP'$. O relație $\preceq\, \subseteq S \times S'$ este o relație de *simulare* între M și M' dacă și numai dacă $\forall s \preceq s'$:
– $L(s) \cap AP' = L'(s')$ (s și s' etichetate la fel în raport cu AP')
– $\forall s_1$ cu $s \rightarrow s_1$ există s'_1 cu $s' \rightarrow s'_1$ și $s_1 \preceq s'_1$
(orice succesor al lui s e simulat de un succesor al lui s')

Structura M' simulează pe M ($M \preceq M'$) dacă există o relație de simulare $\preceq$ a.î. pt. stările inițiale: $\forall s_0 \in S_0\ \exists s'_0 \in S'_0 \,.\, s_0 \preceq s'_0$

Prop: Relația de simulare este o *preordine* pe mulțimea structurilor.
(reflexivă și tranzitivă). Alegem: $s \preceq s'' \Leftrightarrow \exists s' \,.\, s \preceq_1 s' \wedge s' \preceq_2 s''$

Teoremă: Dacă $M \preceq M'$, atunci $M' \models f \Rightarrow M \models f$, pentru orice formulă f în ACTL* peste AP'.

Relația de bisimulare

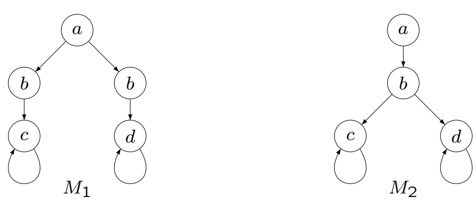
Fie M și M' două structuri cu $AP' = AP$. O relație $\simeq\, \subseteq S \times S'$ este o relație de *bisimulare* între M și M'dacă și numai dacă $\forall s, s'$ cu $s \simeq s'$:
– L(s) = L(s')
– $\forall s_1$ cu $s \rightarrow s_1$ există s'_1 cu $s' \rightarrow s'_1$ și $s_1 \simeq s'_1$
– $\forall s'_1$ cu $s' \rightarrow s'_1$ există s_1 cu $s \rightarrow s_1$ și $s_1 \simeq s'_1$
(sau: $\simeq$ relație de simulare *simetrică*, între M și M' *si* între M' și M)

Structurile M și M' sunt *bisimilare* dacă $\exists$ relație de bisimulare $\simeq$ a.î. pt. stările inițiale: $\forall s_0 \in S_0\ \exists s'_0 \in S'_0 \,.\, s_0 \simeq s'_0$, și $\forall s'_0 \in S'_0\ \exists s_0 \in S_0 \,.\, s_0 \simeq s'_0$.

Prop: Relația de bisimulare este o relație de echivalență între structuri.

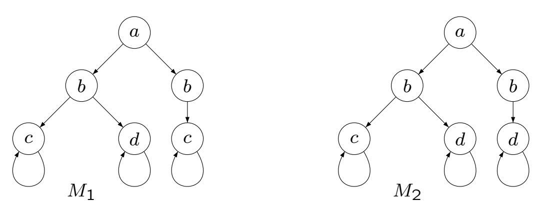
Teoremă: Dacă $M \simeq M'$ atunci $\forall f \in CTL*$, $M \models f \Leftrightarrow M' \models f$.
Reciproc: Două structuri care satisfac aceleași formule CTL* (chiar CTL) sunt bisimilare (echivalent: două structuri care nu sunt bisimilare pot fi deosebite printr-o formulă CTL).

Exemplu: incluziunea limbajelor si simulare



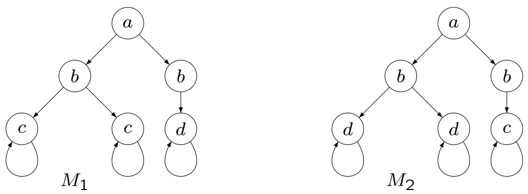
În general: $M \preceq M' \Rightarrow \mathcal{L}(M)|_{AP'} \subseteq \mathcal{L}(M')$
În figură: $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(M_2)$, $M_1 \preceq M_2$, $M_2 \not\preceq M_1$
Definiție echivalentă (teoria jocurilor): $M \preceq M'$ dacă orice mutare în M poate fi urmată de o mutare etichetată la fel în M'.

Exemplu: simulare și bisimulare



În general: $M \simeq M' \Rightarrow M \preceq M' \wedge M' \preceq M$
În figură: $M_1 \preceq M_2$, $M_2 \preceq M_1$ dar $M_1 \not\simeq M_2$
Definiție echivalentă (teoria jocurilor): $M \simeq M'$ dacă orice alegere a unuia din modele *și* a unei mutări în el poate fi urmată de o mutare etichetată la fel în celălalt model.
(alegerea modelului se face la fiecare pas $\Rightarrow$ simetrie)

Exemplu: bisimulare



$M_1 \simeq M_2$
(duplicarea nodurilor nu schimbă proprietățile de ramificare)

Extindere la fairness

Relația $\preceq_F \subseteq S \times S'$ este o relație de simulare *echitabilă* între M și M' (cu $AP' \subseteq AP$) dacă și numai dacă $\forall s \preceq_F s'$:
– $L(s) \cap AP' = L'(s')$
– pentru orice traiectorie *echitabilă* $\pi = s s_1 s_2 \ldots$ în M există o traiectorie echitabilă $\pi' = s' s'_1 s'_2 \ldots$ în M' a.î. $\forall i > 0 \,.\, s_i \preceq s'_i$.
Dacă $M \preceq_F M'$, atunci $\forall f \in ACTL*$, $M' \models_F f \Rightarrow M \models_F f$

Relația $\simeq_F \subseteq S \times S'$ este o relație de bisimulare *echitabilă* între M și M' (cu $AP' = AP$) dacă și numai dacă $\forall s \simeq_F s'$:
– L(s) = L(s')
– pentru orice traiectorie *echitabilă* $\pi = s s_1 s_2 \ldots$ în M există o traiectorie echitabilă $\pi' = s' s'_1 s'_2 \ldots$ în M' a.î. $\forall i > 0 \,.\, s_i \simeq s'_i$.
– pentru orice traiectorie *echitabilă* $\pi' = s' s'_1 s'_2 \ldots$ în M' există o traiectorie echitabilă $\pi = s s_1 s_2 \ldots$ în M a.î. $\forall i > 0 \,.\, s_i \simeq s'_i$.
Dacă $M \simeq_F M'$, atunci $\forall f \in CTL*$, $M' \models_F f \Leftrightarrow M \models_F f$

Algoritmi de verificare a (bi)simulării

Sistem determinist: o singură stare inițială; orice doi succesori etichetați diferit: $s \to s_1 \wedge s \to s_2 \wedge s_1 \neq s_2 \Rightarrow L(s_1) \neq L(s_2)$

Simulare:
M, M' deterministe: $M \preceq M' \Leftrightarrow \mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(M')$

În general: definim recursiv: $s \preceq_0 s' \Leftrightarrow L(s) \cap AP' = L(s')$
$s \preceq_{n+1} s' \Leftrightarrow s \preceq_n s' \wedge \forall s_1 \,.\, s \to s_1 \Rightarrow \exists s'_1 \,.\, s' \to s'_1 \wedge s_1 \preceq_n s'_1$
Avem $\preceq_{i+1} \subseteq \preceq_i \Rightarrow \exists n \,.\, \preceq_n = \preceq_{n+1} = \preceq$ (modele finite)

Bisimulare:
M, M' deterministe: $M \simeq M' \Leftrightarrow \mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$

În general: definim recursiv: $s \simeq_0 s' \Leftrightarrow L(s) = L(s')$
$s \simeq_{n+1} s' \Leftrightarrow s \simeq_n s' \wedge \forall s_1 [s \to s_1 \Rightarrow \exists s'_1 \,.\, s' \to s'_1 \wedge s_1 \simeq_n s'_1]$
$\wedge \forall s'_1 [s' \to s'_1 \Rightarrow \exists s_1 \,.\, s \to s_1 \wedge s_1 \simeq_n s'_1]$
Avem $\simeq_{i+1} \subseteq \simeq_i \Rightarrow \exists n \,.\, \simeq_n = \simeq_{n+1} = \simeq$ (modele finite)

Raționament compozițional

O aplicație a principiului general “divide and conquer” pentru verificarea unui sistem structurat în componente:
– verificarea de proprietăți locale ale componentelor
– obținerea proprietăților globale din proprietățile locale
– fără a construi un model al întregului sistem (impracticabil)

Raționament compozițional: termen generic pentru reguli de tipul:
– $M_1 \models f_1 \wedge M_2 \models f_2 \Rightarrow Compose(M_1, M_2) \models LogicOp(f_1, f_2)$
ex. compoziție paralelă și $LogicOp = \wedge$
– $M_1 \prec M_2 \Rightarrow CompOp(M_1) \prec CompOp(M_2)$
ex. $\prec$ = implementare, rafinare; $CompOp(\cdot) = \cdot || M$
– $M_1 \prec S_1 \wedge M_2 \prec S_2 \Rightarrow Compose(M_1, M_2) \prec Compose(S_1, S_2)$

Compoziție sincronă, simulare, și fair ACTL

Fie $M = (S, S_0, AP, L, R, F)$ și $M' = (S', S'_0, AP', L', R', F')$.
Definim compoziția paralelă sincronă $M'' = M || M'$:
– $S'' = \{(s, s') \in S \times S' \mid L(s) \cap AP' = L'(s') \cap AP\}$
– $S''_0 = (S_0 \times S'_0) \cap S''$
– $AP'' = AP \cup AP'$
– $L''(s, s') = L(s) \cup L'(s')$
– $R''((s, s')(t, t')) = R(s, t) \wedge R'(s', t')$
– $F'' = \{(P \times S') \cap S'' \mid P \in F\} \cup \{(S \times P') \cap S'' \mid P' \in F'\}$

Folosim logica ACTL cu fairness: pentru orice formulă ACTL f se poate construi un tablou $\mathcal{T}_f$, și avem $M \models_F f \Leftrightarrow M \preceq_F \mathcal{T}_f$
$\Rightarrow$ putem raționa uniform cu formule și modele (tablouri)
(a) Pentru orice M și M', $M || M' \preceq_F M$.
(b) Pentru orice M, M' și M'', $M \preceq_F M' \Rightarrow M || M'' \preceq_F M' || M''$
(c) Pentru orice M, $M \preceq_F M || M$

Assume-guarantee necircular

Folosim notația $\langle f \rangle M \langle g \rangle$:
Orice sistem care satisface prezumția f și conține M garantează g.
(f, g sunt fie formule, fie modele)

O structură tipică de raționament:
$\langle \textit{true} \rangle M \langle A \rangle \wedge \langle A \rangle M' \langle g \rangle \wedge \langle g \rangle M \langle f \rangle \Rightarrow \langle \textit{true} \rangle M || M' \langle f \rangle$
Instanțiere în termeni concreți:
M = un transmițător complex
A = un model simplu de transmițător periodic
$\langle \textit{true} \rangle M \langle A \rangle$: M funcționează la fel ca și A
M' = un receptor
g = “mesajele sunt preluate la timp”
$\langle A \rangle M' \langle g \rangle$ = M' compus cu A preia mesajele la timp
f = “nu avem buffer overflow”
$\langle g \rangle M \langle f \rangle$ = dacă M e într-un sistem care preia mesajele la timp, nu avem buffer overflow.
$\Rightarrow$ în sistemul $M || M'$ nu apare buffer overflow.

Justificarea raționamentului

(1) $M \preceq_F A$	ipoteză
(2) $M\|\|M' \preceq_F A\|\|M'$	(1) și compoziționalitate (a)
(3) $A\|\|M' \models_F g$	ipoteză
(4) $A\|\|M' \preceq_F \mathcal{T}_g$	(3) și prop. tabloului ACTL
(5) $M\|\|M' \preceq_F \mathcal{T}_g$	(2), (4) și tranzitivitatea $\preceq_F$
(6) $M\|\|M\|\|M' \preceq_F \mathcal{T}_g\|\|M$	(5) și compoziționalitate (b)
(7) $\mathcal{T}_g\|\|M \models_F f$	ipoteză
(8) $M\|\|M\|\|M' \models_F f$	(6), (7) și $\preceq_F \Rightarrow \models_F$
(9) $M \preceq_F M\|\|M$	compoziționalitate (c)
(10) $M\|\|M' \preceq_F M\|\|M\|\|M'$	(9) și compoziționalitate (b)
(11) $M\|\|M' \models_F f$	(8), (10) și $\preceq_F \Rightarrow \models_F$

Demonstratoare de teoreme pot mecaniza descompunerea
în raționamente pe componente și asigura validitatea deducției.

Assume-guarantee circular

Adeseori, regulile compoziționale sunt insuficient de puternice.
Spre exemplu, avem implementări M_i și specificări S_i, $i = 1, 2$.
Pentru ca $M_1||M_2 \prec S_1||S_2$ ar fi suficient ca $M_1 \prec S_1$ și $M_2 \prec S_2$.
Frecvent, relațiile individuale nu sunt însă satisfăcute:
– componentele M_1 și M_2 nu sunt proiectate independent
– fiecare se bazează că e executată în mediul reprezentat de cealaltă

Exemplu de dependențe

Modelăm algoritmul obișnuit de împărțire a două numere, $n \div d$,
în baza b, cu două componente:
$M_Q(in : r, d; out : q)$ calculează următoarea cifră din cât: $q = \lfloor r/d \rfloor$
$M_R(in : n, d, q; out : r)$ actualizează restul: $r' = (r - q{*}d){*}b + next\_digit(n)$

Dorim ca $M_Q||M_R$ să satisfacă împreună următorii invarianți:
- S_Q: $0 \le q < b \wedge q * d \le r < (q + 1) * d$
- S_R: $0 \le r < b * d$

Totuși, individual nu avem nici $M_Q \models S_Q$ și nici $M_R \models S_R$:
funcționarea corectă a fiecărui modul depinde de celălalt
Dar avem $S_Q \Rightarrow M_R \models S_R$ și $S_R \Rightarrow M_Q \models S_Q$.
(un modul funcționează corect în mediul dat de *specificarea* celuilalt)
$\Rightarrow$ Putem deduce de aici că $M_Q||M_R \models S_Q \wedge S_R$?

Reguli circulare de assume-guarantee

Studiate în diverse contexte [Chandi & Misra'81, Abadi & Lamport'93]

Ne referim concret la Reactive Modules [Alur & Henzinger '95]:
– module cu variabile de intrare, de ieșire, relație de tranziție
– relație de dependență $\prec \subseteq (V_{in} \cup V_{out}) \times V_{out}$
– $x \prec y$: y depinde *combinațional* de x;
altfel, doar valoarea următoare a lui y poate depinde (secvențial) de x
– compoziția paralelă sincronă $M_1||M_2$ e posibilă
dacă $V_{out}(M_1) \cap V_{out}(M_2) = \emptyset$ și $\prec_{M_1} \cup \prec_{M_2}$ e o relație aciclică.

Definim relația de *rafinare* (implementare) $M \le M'$ dacă
$V(M') \subseteq V(M)$, $V_{out}(M') \subseteq V_{out}(M)$, $\prec_M \supseteq \prec'_M$, $\mathcal{L}(M)|_{V(M')} \subseteq \mathcal{L}(M')$
(primele 3: dacă P poate funcționa într-un context, atunci și Q)

Reguli circulare de assume-guarantee (cont.)

Pentru module reactive: $$\frac{M_1||S_2 \le S_1||S_2 \qquad S_1||M_2 \le S_1||S_2}{M_1||M_2 \le S_1||S_2}$$
(presupunând că toate compozițiile sunt bine definite)

Avantajul: deși avem de demonstrat două relații, fiecare din ele este mai simplă decât cea originală
– descrierea specificării S_i e mult mai simplă decât implementarea M_i
– nu trebuie compuse cele două implementări (adesea imposibil)

Regulă cu inducție temporală [McMillan'97]
valabilă pentru *invarianți* (safety properties)
– dacă $P_1 \wedge Q_1$ valabile la $0, 1, \cdots, t \Rightarrow Q_2$ valabil la $t + 1$
– dacă $P_2 \wedge Q_2$ valabile la $0, 1, \cdots, t \Rightarrow Q_1$ valabil la $t + 1$
– atunci pentru orice t, $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow Q_1 \wedge Q_2$

Relația dintre compoziționalitate și rafinare

[Henzinger'01] - studiu al teoriei interfețelor
Pt. o relație de rafinare $\le$ și una de compoziție $||$, dorim:
Dacă $M_1 \le S_1$ și $M_2 \le S_2$, atunci $M_1||M_2 \le S_1||S_2$

În general, insuficient – posibilă incompatibilitate la compoziție
$\Rightarrow$ două variante:

- Dacă $M_1 \le S_1$ și $M_2 \le S_2$, și $M_1||M_2$ e definit,
atunci $S_1||S_2$ e definit și $M_1||M_2 \le S_1||S_2$
– formalism axat pe *componente*
– permite verificarea independentă a componentelor (bottom-up)

- Dacă $M_1 \le S_1$ și $M_2 \le S_2$, și $S_1||S_2$ e definit,
atunci $M_1||M_2$ e definit și $M_1||M_2 \le S_1||S_2$
– formalism axat pe *interfețe*
– permite implementarea independentă a interfețelor (top-down)